Leçon 153 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

1 Le rapport du jury

Rapport de jury

Cette leçon doit aborder le bagage **théorique** propre aux vecteurs propres et aux valeurs propres et mettre en lumière l'exploitation de techniques d'algèbre ou d'analyse pour aborder leur recherche. Après avoir exploré la **détermination théorique exacte des éléments propres**, on s'intéresse à des exemples de matrices dont les éléments propres sont remarquables (matrices compagnons, matrices circulantes, matrices d'ordre fini, matrices stochastiques...) et donne des **exemples de situations où la connaissance d'éléments propres s'avère utile**. On doit connaître les limites du calcul exact, même si le cadre mathématique nécessaire est non exigible et hors programme, et introduire sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ **une ou plusieurs méthodes itératives**, dont on démontre la convergence. On peut citer les méthodes de la puissance, puissance inverse et QR pour la recherche d'éléments propres. Les notions de norme matricielle, de rayon spectral doivent être maîtrisées. Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu et illustré. On peut aussi s'intéresser à la **localisation des valeurs propres**.

Pour aller plus loin, on peut aborder la problématique du **conditionnement** en distinguant le problème général et le cas particulier des matrices auto-adjointes, s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être faits avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide, ainsi qu'au comportement de la suite des itérées de matrices stochastiques ou plus généralement de matrices à coefficients positifs, au moins dans des cas particuliers.

Commentaires généraux C'est une leçon très riche qui permet d'aborder de nombreux domaines : outre bien évidemment la réduction des endomorphismes, le jury attend que les candidats s'intéressent à l'analyse numérique et proposent des algorithmes de calculs approchés (ce qui devrait enchanter les candidats d'option B). Parmi les autres suggestions (non obligatoires, comme l'indique le "pour aller plus loin" !) du rapport, les plus accessibles me semblent l'étude du conditionnement, et, pour celles et ceux d'entre vous qui connaissent le théorème de Perron-Frobenius, des matrices stochastiques ou positives.

2 Commentaires détaillés et pistes à creuser pour la leçon

2.1 Généralités et aspects théoriques

- Attention, ce n'est pas une leçon de diagonalisation ou de trigonalisation. Il y aura des éléments communs avec les leçons 150, 152 et 156, mais ne les recyclez pas entièrement. Choisissez des résultats faisant intervenir les éléments propres et énoncez vos résultats à l'aide de formulations les mettant en avant.
- Vous devez comprendre que **le problème de la détermination des valeurs propres des matrices est équivalent à la détermination des racines des polynômes**. Vous savez bien que si on sait trouver les racines des polynômes, alors à l'aide du polynôme caractéristique (ou minimal), on saura calculer les valeurs propres des matrices. N'oubliez pas que, réciproquement, si on sait déterminer les valeurs propres des matrices, alors à l'aide des **matrices compagnons**, on saura calculer les racines des polynômes puisque le polynôme caractéristique de la matrice compagnon d'un polynôme P est P.
  Cette équivalence établie, on peut alors dire que le calcul exact n'est pas toujours possible. En effet, la théorie de Galois (qui n'est pas au programme) permet de démontrer qu'à partir du degré 5, il n'y a pas de formule

"simple" (du type $\frac{-b\pm\sqrt{4ac}}{2a}$) exprimant les racines d'un polynôme à partir de ses coefficients à l'aide des opérations usuelles $+, -, \times, \div$ et des racines n-ièmes.

Une fois qu'on a déterminé les valeurs propres d'une matrice M, le calcul des vecteurs propres devient un "simple" système d'équations à résoudre : $Mx = \lambda x$ pour λ valeur propre de M. On dispose alors de méthodes exactes, comme par exemple la méthode du pivot de Gauss.

- Vous devez connaître les différentes **notions de multiplicités** des valeurs propres (minimale m_m, algébrique m_a et géométrique m_g, voir l'exercice 1 pour les définitions) et savoir les comparer (voir l'exercice 1 à nouveau). Dans cette leçon, il peut être intéressant de reformuler les critères de diagonalisabilité que vous connaissez bien à l'aide de ces multiplicités. Le critère de diagonalisabilité à l'aide du polynôme minimal devient : "M est diagonalisable si et seulement si μ_M est scindé et pour toute valeur propre λ, $m_m(\lambda) = 1$". Le critère de diagonalisabilité à l'aide du polynôme caractéristique devient "M est diagonalisable si et seulement si χ_M est scindé et pour toute valeur propre λ, $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$".
- Beaucoup de propriétés des matrices se reformulent à l'aide des valeurs propres. Une matrice est non inversible si et seulement si 0 en est valeur propre. Sur un corps algébriquement clos, la trace et le déterminant s'expriment simplement à l'aide des valeurs propres comptées avec multiplicité algébrique, et une matrice est nilpotente si et seulement si sa seule valeur propre est 0.
- Dans le **cas autoadjoint** sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, en plus de la diagonalisabilité, le théorème spectral donne des propriétés des éléments propres : les valeurs propres sont réelles et les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. Par ailleurs, le caractère positif (resp. défini positif) d'un endomorphisme autoadjoint s'exprime à l'aide de la positivité (resp. stricte positivité) des valeurs propres. Enfin, le théorème du minimax donne une expression variationnelle des valeurs propres d'un endomorphisme autoadjoint (voir exercice 8) et possède des applications intéressantes, dont certaines sont présentes dans [6] ou [7].
- L'application qui à une matrice associe ses valeurs propres (complexes) est continue. Cette assertion mérite des explications : est-ce qu'on compte les valeurs propres avec multiplicité ? Comment les ordonne-t-on ? La bonne notion pour répondre à ces questions est la topologie quotient, mais c'est délicat et pas au programme. La formulation adoptée par [2] est plus élémentaire. La voici. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui converge vers une matrice A. On peut ordonner les valeurs propres $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ de A et, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, les valeurs propres $(\lambda_{k,i})_{1\leq i\leq n}$ (comptées avec multiplicité algébrique) de façon à ce que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_{k,i} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \lambda_i$.
- Le **rayon spectral** $\rho(M)$ d'une matrice complexe M est le maximum des modules de ses valeurs propres. Ce n'est pas une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, mais il a des liens avec les normes subordonnées : il permet d'exprimer la norme subordonnée à la norme euclidienne (ce qui permet de montrer que ρ est une norme sur $S_n(\mathbb{R})$) et $\rho(M)$ est la borne inférieure des $|||M|||$ pour $|||\cdot|||$ norme subordonnée. Ce résultat permet de caractériser les matrices M dont la suite des puissances $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 : ce sont les matrices de rayon spectral strictement inférieur à 1. On peut exprimer le rayon spectral par la formule de Gelfand : $\rho(M) = \lim_{k\to+\infty} \left\|M^k\right\|^{1/k}$. Pour tout cela, voir par exemple [5]. Le résultat sur la convergence vers 0 de $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ permet de donner un critère de convergence de méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires. On y revient tout de suite.

2.2 Applications en analyse numérique

Méthodes itératives de résolution de systèmes. Pour résoudre le système $Ax = b$ où $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ et d'inconnue $x \in \mathbb{R}^n$, une méthode générale est de décomposer A sous la forme

$$A = M - N$$

où M est une matrice inversible particulièrement facile à inverser, puis de construire une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ partant de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et vérifiant $Mx_{k+1} = Nx_k + b$ [1], autrement dit $x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b)$. L'erreur $e_k := x_k - x$ vérifie $e_k = \left(M^{-1}N\right)^k e_0$. Par conséquent, d'après le résultat précédemment évoqué sur la caractérisation des suites de puissances qui convergent vers 0, la méthode converge pour tout choix de x_0 si et seulement si $\rho\left(M^{-1}N\right) < 1$: le problème de convergence se ramène à un problème de localisation de valeurs propres.

Le choix de la décomposition $A = M - N$ est donc crucial. On note D la diagonale de A, $-E$ sa partie triangulaire inférieure stricte et $-F$ sa partie triangulaire supérieure stricte. Dans le cas où tous les coefficients diagonaux de A

1. L'idée étant que si la suite (x_k) converge, sa limite ℓ doit vérifier $M\ell = N\ell + b$, c'est-à-dire $(M - N)\ell = b$, autrement dit $A\ell = b$, c'est-à-dire $\ell = x$.

sont non nuls, en prenant $M = D$ et $N = D - A$, on obtient la méthode dite de Jacobi. En prenant $M = D - E$ et $N = M - A = F$, la méthode est appelée méthode de Gauss-Seidel. On peut la raffiner pour obtenir la méthode de relaxation.

Pour ce thème, on peut consulter par exemple [4] page 155 et suivantes ou bien [1] page 95 et suivantes.

Conditionnement d'un système linéaire. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $u \in \mathbb{R}^n$. Le système d'équations $Ax = u$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^n$ possède une unique solution : $x_{A,u} = A^{-1}u$. Par ailleurs, il est classique que $A \mapsto A^{-1}$ est continue sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, donc la solution $x_{A,u}$ est une fonction continue de (A, u) : lorsque $\tilde{A}$ tend vers A et $\tilde{u}$ tend vers u, la solution $x_{\tilde{A},\tilde{u}}$ de $\tilde{A}x = \tilde{u}$ doit tendre vers $x_{A,u}$. Néanmoins, cet argument théorique ne donne pas de borne explicite sur l'erreur $\left\| x_{\tilde{A},\tilde{u}} - x_{A,u} \right\|$ et en pratique, on observe parfois une très grande erreur alors que $\tilde{A}$ et $\tilde{u}$ sont très proches de A et u (voir exemples dans [4] et [1]). C'est fâcheux car, en pratique, les ordinateurs travaillent avec des approximations des nombres réels : quand on leur demande de résoudre le système $Ax = u$, ils résolvent un système du type $\tilde{A}x = \tilde{u}$ où $\tilde{A}$ et $\tilde{u}$ sont des approximations de A et u.

La notion de **conditionnement d'un système linéaire** permet d'expliciter une borne sur l'erreur $\left\| x_{\tilde{A},\tilde{u}} - x_{A,u} \right\|$. L'erreur est d'autant plus petite que le conditionnement est petit. Ce conditionnement dépend du choix d'une norme sur $\mathbb{R}^n$. Lorsqu'on choisit la norme euclidienne, il s'exprime à l'aide de valeurs propres, ce qui fait le lien avec la leçon. On pourra consulter [1] ou [4] pour en savoir plus sur le conditionnement. Voir aussi l'exercice 4.

2.3 Localisation de valeurs propres

Le calcul exact des valeurs propres n'étant pas toujours possible, on peut essayer de déterminer une zone où elles se situent. C'est le principe de la localisation des valeurs propres.

Rayon spectral. Tout ce qu'on a dit précédemment du **rayon spectral** s'inscrit dans les problèmes de localisation des valeurs propres : par définition, les valeurs propres (complexes) d'une matrice M sont dans le disque $\overline{D(0, \rho(M))}$.

Disques de Gerschgorin. Le résultat le plus basique de localisation des valeurs propres est celui des disques de Gerschgorin.[2] Il indique que, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, si on note $D_i = \overline{D\left(a_{i,i}, \sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} a_{i,j}\right)}$ le i-ième disque de Gerschgorin, alors les valeurs propres de A sont dans l'union des D_i. C'est un résultat classique que vous trouverez dans de nombreux livres, par exemple [3] ou [2]. On peut le raffiner de plusieurs manières :

— Comme les valeurs propres de A^T sont les mêmes que celles de A, en notant D'_i les disques de Gerschgorin de A^T, on a
$$\mathrm{Sp}(A) \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} D_i \right) \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{n} D'_i \right).$$

— Certains disques ne contiennent aucune valeur propre. Par exemple, pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0,01 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, les valeurs propres sont (environ) $-2,78$; $1,87$ et $0,91$. Le deuxième disque de Gerschgorin $\overline{D\,(-1;\ 1,01)}$ n'en contient aucune.

En revanche, si on s'intéresse aux composantes connexes $(C_j)_{1 \leq j \leq k}$ de $\bigcup_{i=1}^{n} D_i$, et que, pour chaque j, on note n_j le nombre de disques D_i qui constituent C_j, alors on peut dire qu'il y a n_j valeurs propres (comptées avec multiplicité algébrique) dans C_j. Ce joli résultat se trouve dans [2]. Il utilise la continuité du spectre mentionnée plus haut. Le duo "continuité du spectre et raffinement de Gerschgorin" peut faire un joli **développement**.

Au passage, ce raffinement montre que si les disques de Gerschgorin de A sont deux à deux disjoints, alors chaque disque contient exactement une valeur propre. Il y a donc n valeurs propres distinctes, ce qui montre que A est diagonalisable.

2. Comme souvent pour les noms de mathématiciens russes, il existe de nombreuses variantes de l'écriture en alphabet latin : Gershgorin, Guerchgorine... Ne soyez pas étonnés si vous rencontrez plusieurs orthographes.

Conditionnement d'un problème de valeurs propres. C'est le retour du conditionnement, mais dans un autre contexte. Il n'est plus ici question de résoudre un système linéaire mais de localiser les valeurs propres d'une matrice diagonalisable perturbée, c'est-à-dire de la forme $A+\varepsilon$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable et où $\varepsilon \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Voir par exemple [1] et l'exercice 5.

2.4 Calculs approchés de valeurs propres et vecteurs propres

Toujours en raison de l'impossibilité du calcul exact des valeurs propres, on cherche à construire des suites qui convergent vers une/des/les valeur(s) propre(s) d'une matrice. De nombreuses méthodes existent, certaines permettant d'approcher l'ensemble du spectre, d'autres seulement certaines valeurs propres. Certaines méthodes approchent les vecteurs propres en même temps que les valeurs propres et d'autres non. Certaines méthodes sont valables pour presque toutes les matrices, d'autres uniquement pour une classe restreinte de matrices (typiquement les matrices symétriques). Je vous renvoie à nouveau vers les livres [4] et [1]. Je ne vais aborder que les méthodes citées par le rapport du jury : puissance, puissance inverse et QR.

Méthode de la puissance. Elle permet de calculer la valeur propre dominante (c'est-à-dire de plus grand module) λ d'une matrice diagonalisable réelle A, lorsque λ est simple et strictement positive. Elle s'exprime très simplement : partant d'un vecteur unitaire $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dont la composante selon le sous-espace propre E_λ est non nulle, on pose $y_{k+1} = Ax_k$ et $x_{k+1} = \frac{y_k}{\|y_k\|}$ (où la norme utilisée est la norme euclidienne usuelle). La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge alors vers un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre λ et la suite $(\|y_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ vers λ.

La preuve de convergence est très simple, voir par exemple [4]. La vitesse de convergence est en $\left(\frac{|\mu|}{\lambda}\right)^k$ où μ est la deuxième plus grande valeur propre de A en module.

Méthode de la puissance inverse. C'est la méthode de la puissance appliquée à A^{-1}. Elle permet donc de calculer la valeur propre de plus petit module lorsque celle-ci est strictement positive.

Méthode QR. C'est une méthode qui permet d'approcher l'ensemble du spectre de matrices assez générales. Elle se base sur la décomposition QR des matrices, qui est une reformulation de l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Rappelons le résultat. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale Q_M et une matrice triangulaire supérieure R_M à coefficients diagonaux positifs telles que $M = Q_M R_M$. Si M est inversible, alors les coefficients diagonaux de R_M sont strictement positifs (ce que l'on notera $R_M \in T_n^{++}(\mathbb{R})$ et la décomposition est unique. Encore mieux, l'application $\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \to & O_n(\mathbb{R}) \times T_n^{++}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & (Q_M, R_M) \end{array}$ est un homéomorphisme.

La méthode QR consiste à partir d'une matrie $A = A_0$, puis à poser $A_{k+1} = R_k Q_k$ où $A_k = Q_k R_K$ est la décomposition QR de A_k. Sous quelques hypothèses techniques, la matrice triangulaire inférieure extraite de A_k converge vers une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres (complexes) de A.

Le livre [1] prouve la convergence de la méthode. Cela peut faire l'objet d'un **développement** (un peu technique).

3 Exercices

3.1 Énoncés

Exercice 1 (Notions de multiplicités, [3])**.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de M. On définit les multiplicités :

— minimale $m_m(\lambda)$ comme la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme minimal μ_M ;

— algébrique $m_a(\lambda)$ comme la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique χ_M ;

— géométrique $m_g(\lambda)$ comme la dimension du sous-espace propre $\ker(M - \lambda\mathrm{I}_n)$.

1. Montrer que $m_a(\lambda)$ est la dimension du sous-espace caractéristique $\ker\left((M - \lambda\mathrm{I}_n)^{m_a(\lambda)}\right)$.
2. Montrer que $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$ et $1 \leq m_m(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.
3. Montrer qu'il n'y a en général pas d'ordre entre m_m et m_g.
4. Montrer que $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ si et seulement si $m_m(\lambda) = 1$.

Exercice 2 (Valeurs propres de la comatrice, [3])**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les valeurs propres de la comatrice de A en fonction de celles de A.
On distinguera selon le rang de A.

Exercice 3 (Norme subordonnée à la norme euclidienne)**.** Soit $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$ et $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_2$ la norme subordonnée associée, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|\!|\!|A|\!|\!|_2^2 = \rho\left(A^T A\right) = \rho\left(AA^T\right)$ où ρ désigne le rayon spectral.
2. En déduire que ρ définit une norme sur l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques réelles de taille n.

Exercice 4 (Conditionnement, [1])**.** Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ la norme subordonnée associée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le conditionnement d'une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est $\mathrm{cond}(A) = |\!|\!|A|\!|\!| |\!|\!|A^{-1}|\!|\!|$.
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la solution de $Au = b$. Soit $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n$ et $\tilde{u}$ la solution de $A\tilde{u} = \tilde{b}$.

1. Montrer que $\frac{\|u-\tilde{u}\|}{\|u\|} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}$.

Soit $\hat{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On ne la suppose pas forcément inversible, mais on suppose que l'équation $\hat{A}x = b$ a une solution, qu'on note $\hat{u}$.

2. Montrer que $\frac{\|u-\hat{u}\|}{\|u\|} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{\|A-\hat{A}\|}{\|A\|}$.

Le conditionnement permet donc de contrôler l'erreur $u - \tilde{u}$ (resp. $u - \hat{u}$) de la solution en fonction de l'erreur $b - \tilde{b}$ (resp. $A - \hat{A}$) des données du système. Plus il est petit, meilleur est ce contrôle.

3. Montrer que pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{cond}(A) \geq 1$.

On suppose désormais que $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$.

4. Calculer le conditionnement de A en fonction de certaines valeurs propres de $A^T A$.
   On utilisera l'exercice précédent.
5. Montrer que le conditionnement d'une matrice orthogonale est 1. *Les matrices orthogonales ont donc un conditionnement optimal pour la norme euclidienne usuelle.*

Exercice 5 (Conditionnement d'un problème aux valeurs propres, théorème de Bauer-Fike, [1])**.**

1. Soit $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ une norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $|\!|\!|A|\!|\!| \geq \rho(A)$.
2. Montrer que le résultat reste vrai pour une norme sous-multiplicative (pas nécessairement subordonnée).
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\|\cdot\|$ une norme sous-multiplicative. On suppose que $\mathrm{I}_n + M$ n'est pas inversible. Montrer que $\|M\| \geq 1$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Soit $\|\cdot\|$ une norme sous-multiplicative telle que pour toute matrice diagonale $d = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, $\|d\| = \max_i |d_i|$.[3] Soit $\varepsilon \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On veut montrer que le spectre de $A + \varepsilon$ est inclus dans $\bigcup_{i=1}^n D_i$ où $D_i = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z - \lambda_i| \leq \mathrm{cond}(P)\|\varepsilon\|\}$.

4. Montrer que pour $t \in \mathbb{C}$ différent de tous les λ_i, on a
$$P^{-1}(A + \varepsilon - t\mathrm{I}_n)P = (D - t\mathrm{I}_n)\left(\mathrm{I_n} + (D - t\mathrm{I}_n)^{-1}P^{-1}\varepsilon P\right).$$
5. En déduire que, si t est en outre une valeur propre de $A + \varepsilon$, alors $1 \leq \left\|(D - t\mathrm{I}_n)^{-1}\right\| \left\|P^{-1}\right\| \|\varepsilon\| \|P\|$ puis conclure en calculant $\left\|(D - t\mathrm{I}_n)^{-1}\right\|$.

Comme la borne est valable pour n'importe quelle matrice de passage P telle que $P^{-1}AP$ est diagonale, on peut l'optimiser : on définit le conditionnement de A relativement au calcul des valeurs propres par
$$\Gamma(A) = \inf\left\{\mathrm{cond}(P) \ ; \ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ et } P^{-1}AP = D\right\}$$
et on a alors
$$\mathrm{sp}(A + \varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^n D_i$$
où
$$D_i = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z - \lambda_i| \leq \Gamma(A)\|\varepsilon\|\}.$$

3. C'est le cas des normes subordonnées aux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 6 (Convergence vers 0 de la suite des puissances, [5]). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\rho(A) = \inf\{|||A||| \; ; \; |||\cdot||| \text{ est une norme subordonnée}\}$.
2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) il existe une norme subordonnée $|||\cdot|||$ telle que $|||A||| < 1$;
   (ii) la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ;
   (iii) $\rho(A) < 1$.
3. Montrer que dans ces conditions, la série $\sum A^k$ converge.
4. Montrer que pour toute norme subordonnée $|||\cdot|||$, $\left|\left|\left|A^k\right|\right|\right|^{1/k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \rho(A)$.
5. Montrer que la limite précédente reste vraie pour n'importe quelle norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 7 (Caractère borné de la suite des puissances, [5]). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\big[\rho(A) \leq 1$ et pour toute valeur propre λ de A telle que $|\lambda| = 1$, le sous-espace propre associé à λ est égal au sous-espace caractéristique associé à $\lambda\big]$.

Exercice 8 (Théorème du minimax, [6] ou [7]). Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. D'après le théorème spectral, f est diagonalisable en base orthonormée. On note $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres rangées dans l'ordre croissant. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note S_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension k.

Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\lambda_k = \min_{F\in\mathrm{S}_k} \max_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle = \max_{F\in\mathrm{S}_{n-k+1}} \min_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle.$$

Exercice 9 (Deux applications de l'exercice précédent, [6] ou [7]). Soit E un espace euclidien de dimension n.

1. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoints, de valeurs propres respectives ordonnées $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ et $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_n$. On suppose que pour tout $x \in E$, $\langle f(x), x\rangle \leq \langle g(x), x\rangle$. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k \leq \mu_k$.
2. *(Entrelacement de Cauchy)* Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint, G un hyperplan de E, p la projection orthogonale de sur G et g l'endomorphisme induit sur G par $p \circ f$.
   (a) Montrer que g est autoadjoint.

   Il est donc diagonalisable. On note $\mu_1 \leq \ldots \leq \mu_{n-1}$ ses valeurs propres.

   (b) Montrer que $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1} \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n$.

3.2 Éléments de correction

Solution 1. 1. On rencontre souvent la preuve dans le cas trigonalisable, où elle est un peu plus simple. Je vous l'écris dans le cas général.

Écrivons

$$\chi_M = (X - \lambda)^{m_a(\lambda)} \times \prod_{j=1}^{k} P_j^{\alpha_j}$$

la décomposition de χ_M en produit d'irréductibles. D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux,

$$\mathbb{K}^n = \ker(\chi_M(M)) = \ker\left((M - \lambda\mathrm{I}_n)^{m_a(\lambda)}\right) \oplus \bigoplus_{j=1}^{k} \ker\left(P_j(M)^{\alpha_j}\right). \tag{1}$$

De plus les sous-espaces apparaissant dans cette décomposition sont stables par M (ce sont des noyaux de polynômes en M, donc de matrices qui commutent avec M). Notons g l'endomorphisme induit par M sur $\ker\left((M - \lambda\mathrm{I}_n)^{m_a(\lambda)}\right)$ et f_j celui induit sur $\ker\left(P_j(M)^{\alpha_j}\right)$ pour $j \in [\![1, k]\!]$. Dans une base B adaptée à la décomposition (1), la matrice de M est diagonale par blocs, égale à

$$\mathrm{M}_B(M) = \mathrm{diag}\left(\mathrm{M}_{\tilde{B}}(g), \mathrm{M}_{B_1}(f_1), \ldots, \mathrm{M}_{B_k}(f_k)\right),$$

d'où

$$\chi_M = \chi_g \times \prod_{j=1}^{k} \chi_{f_j}.$$

En outre, λ n'est valeur propre d'aucun des f_j (sinon, un vecteur propre associé serait à la fois dans un $\ker(P_j(M)^{\alpha_j})$ et dans $\ker\left((M-\lambda \mathrm{I}_n)^{m_a(\lambda)}\right)$, ce qui est interdit par la somme directe (1)), donc λ n'est racine d'aucun des χ_{f_j}. La multiplicité $m_a(\lambda)$ de λ comme racine de χ_M est donc la multiplicité de λ comme racine de χ_g.
Mais g est annulé par $(X-\lambda)^{m_a(\lambda)}$. On en déduit que λ est sa seule valeur propre et que, étant annulé par un polynôme scindé, g est trigonalisable, donc χ_g est scindé. Par conséquent, χ_g est une puissance de $X-\lambda$, et le polynôme caractéristique ayant pour degré la dimension de l'espace, $\chi_g = (X-\lambda)^{\dim\ker\left((M-\lambda \mathrm{I}_n)^{m_a(\lambda)}\right)}$.
D'après le lien établi précédemment entre $m_a(\lambda)$ et la multiplicité de λ comme racine de χ_g, on conclut bien que $m_a(\lambda) = \dim\ker\left((M-\lambda \mathrm{I}_n)^{m_a(\lambda)}\right)$.

2. Puisque λ est valeur propre de M, $\ker(M-\lambda \mathrm{I}_n) \neq \{0\}$, donc $m_g(\lambda) \geq 1$. En outre, $\ker(M-\lambda \mathrm{I}_n) \subset \ker\left((M-\lambda \mathrm{I}_n)^{m_a(\lambda)}\right)$, donc $m_g(\lambda) \leq \dim\ker\left((M-\lambda \mathrm{I}_n)^{m_a(\lambda)}\right)$ qui est $m_a(\lambda)$ d'après la question précédente d'où
$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda).$$
De même, λ étant valeur propre de M, c'est une racine de μ_M, d'où $m_m(\lambda) \geq 1$. Par ailleurs, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, μ_M divise χ_M, donc $m_m(\lambda) \leq m_a(\lambda)$, d'où
$$1 \leq m_m(\lambda) \leq m_a(\lambda).$$
3. Pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $m_g(0) = 2$ et $m_m(0) = 1$ car $\mu_M = X$, d'où $m_g(0) > m_m(0)$. Pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a $m_g(0) = 1$ et $m_m(0) = 2$ car $\mu_M = X^2$, d'où $m_g(0) < m_m(0)$.
4. On reprend la décomposition (1) et les endomorphismes induits. On a cette fois $\mu_M = \mathrm{PPCM}(\mu_g, \mu_{f_1}, \dots \mu_{f_k})$, donc $m_m(\lambda)$ est le maximum des multiplicités de λ comme racine de μ_g et des μ_{f_j}. Comme précédemment, λ n'est racine d'aucun μ_{f_j}, donc $m_m(\lambda)$ est la multiplicité de λ comme racine de μ_g. En outre, μ_g divise $(X-\lambda)^{m_a(\lambda)}$ car ce polynôme annule g, donc μ_g est une puissance de $X-\lambda$, et finalement
$$\mu_g = (X-\lambda)^{m_m(\lambda)}.$$
On a donc $m_m(\lambda) = 1$ si et seulement si $g = \lambda \mathrm{Id}_{\ker\left((M-\lambda \mathrm{I}_n)^{m_a(\lambda)}\right)}$. Cette condition est équivalente à dire que $\ker\left((M-\lambda \mathrm{I}_n)^{m_a(\lambda)}\right)$, qui *contient toujours* $\ker(M-\lambda \mathrm{I}_n)$, lui est en fait égal. En raison de l'inclusion toujours vraie, l'égalité de ces espaces équivaut à l'égalité de leurs dimensions, c'est-à-dire à $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.

Solution 2. Si $n = 1$, alors $\mathrm{Com}(A) = (1)$ a 1 pour unique valeur propre. Dans la suite, on suppose $n \geq 2$.
On note $\mathrm{Com}(A)$ la comatrice de A. On rappelle que son coefficient (i,j) est $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ où $\Delta_{i,j}$ est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A. On rappelle aussi que

$$A\mathrm{Com}(A)^T = \mathrm{Com}(A)^T A = \det(A)\mathrm{I}_n. \tag{2}$$

- Le rang d'une matrice est la taille maximale de ses déterminants extraits non nuls. Ainsi, si $\mathrm{rg}(A) \leq n-2$, alors aucun déterminant extrait de A de taille $n-1$ n'est non nul, d'où $\mathrm{Com}(A) = 0$. Dans ce cas, 0 est la seule valeur propre de $\mathrm{Com}(A)$.
- Si $\mathrm{rg}(A) = n$, alors A est inversible et $\mathrm{Com}(A)^T = \det(A)A^{-1}$. Les valeurs propres de $\mathrm{Com}(A)$ sont donc celles de $\det(A)A^{-1}$, c'est-à-dire les $\frac{\det(A)}{\lambda}$ pour λ valeur propre de A (et les multiplicités de $\frac{\det(A)}{\lambda}$ sont les mêmes que celles de λ pour A).
- Il reste le cas où $\mathrm{rg}(A) = n-1$. Dans ce cas, A n'est pas inversible donc (2) conduit à $A\mathrm{Com}(A)^T = 0$, et donc $\mathrm{Im}\left(\mathrm{Com}(A)^T\right) \subset \ker A$, d'où
$$\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Com}(A)^T\right) \leq \dim\ker(A) = 1,$$
où la dernière égalité vient du théorème du rang. De plus, le résultat déjà rappelé sur le rang comme taille maximale d'un déterminant extrait non nul montre qu'il existe un coefficient de $\mathrm{Com}(A)$ non nul, et donc

$\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) \geq 1$, d'où finalement $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) = 1$. Par conséquent, 0 est valeur propre de $\mathrm{Com}(A)$ de multiplicité géométrique $n-1$, donc de multiplicité algébrique égale à $n-1$ ou à n.

Il reste à trouver une éventuelle dernière valeur propre λ de $\mathrm{Com}(A)$.[4] Comme la trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres répétées selon les multiplicités algébriques, $\lambda = \mathrm{tr}(\mathrm{Com}(A))$. Par continuité de la trace et de $M \mapsto \mathrm{Com}(M)$[5], on a $\lambda = \lim_{t\to 0} \mathrm{tr}(\mathrm{Com}(A+t\mathrm{I}_n))$. Mais $\mathrm{Com}(A)$ n'ayant qu'un nombre fini de valeurs propres, pour $t > 0$ assez petit, $\mathrm{Com}(A+t\mathrm{I}_n)$ est inversible, donc ses valeurs propres sont les $\frac{\det(A+t\mathrm{I}_n)}{\lambda_j+t} = \frac{\prod_{k=1}^n(\lambda_k+t)}{\lambda_j+t} = \prod_{k\neq j}(\lambda_k+t)$ où les λ_j sont les valeurs propres de A, répétées avec multiplicités algébriques, d'après le cas inversible traité précédemment. Ainsi,

$$\mathrm{tr}(\mathrm{Com}(A+t\mathrm{I}_n)) = \sum_{j=1}^n \prod_{k\neq j}(\lambda_k+t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} \sum_{j=1}^n \prod_{k\neq j}\lambda_k = \lambda.$$

On sait que 0 est valeur propre de A car A n'est pas inversible. Disons par exemple que $\lambda_1 = 0$. Alors dans la somme précédente, il ne reste que

$$\lambda = \prod_{k=2}^n \lambda_k.$$

Remarque : dans ce dernier cas, on peut dire quand $\mathrm{Com}(A)$ *est diagonalisable. En effet, la multiplicité géométrique de* 0 *pour* $\mathrm{Com}(A)$ *est* $n-1$. *Si* $\lambda = 0$, *autrement dit si la multiplicité algébrique de* 0 *pour* A *est supérieure ou égale à* 2, *alors* A *n'est pas diagonalisable (sans quoi elle serait nulle). Si en revanche* $\lambda \neq 0$, *alors* $\ker(M-\lambda\mathrm{I}_n)$ *est non nul et en somme directe avec* $\ker M$. *Pour des raisons de dimension, on a alors* $E = \ker M \oplus \ker(M-\lambda\mathrm{I}_n)$ *donc* M *est diagonalisable.*

Solution 3. 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On a

$$\begin{aligned}\left(\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}\right)^2 &= \frac{\langle Ax, Ax\rangle}{\langle x, x\rangle} \\ &= \frac{\left\langle A^TAx, x\right\rangle}{\langle x, x\rangle}.\end{aligned}$$

La matrice A^TA est symétrique réelle, donc diagonalisable en base orthonormée. Elle est en outre positive car pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\left\langle x, A^TAx\right\rangle = \langle Ax, Ax\rangle \geq 0$. Notons $0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n = \rho\left(A^TA\right)$ ses valeurs propres (répétées avec multiplicités algébriques) et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés à ces valeurs propres. Décomposons x dans cette base en $x = \sum_{i=1}^n x_ie_i$. On a alors

$$\begin{aligned}\left(\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}\right)^2 &= \frac{\left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_ix_ie_i, \sum_{j=1}^n x_je_j\right\rangle}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_ix_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &\leq \lambda_n\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \lambda_n \\ &= \rho\left(A^TA\right).\end{aligned}$$

En passant à la borne supérieure, il vient $|\!|\!|A|\!|\!|_2^2 \leq \rho\left(A^TA\right)$. En outre $\left(\frac{\|Ae_n\|_2}{\|e_n\|_2}\right)^2 = \lambda_n = \rho\left(A^TA\right)$ donc $|\!|\!|A|\!|\!|_2^2 = \sup_{x\neq 0}\left(\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}\right)^2 \geq \rho\left(A^TA\right)$, ce qui prouve

$$|\!|\!|A|\!|\!|_2^2 = \rho\left(A^TA\right).$$

Il reste à prouver que $\rho\left(A^TA\right) = \rho\left(AA^T\right)$. Supposons d'abord que $\rho\left(A^TA\right) > 0$. Soit u un vecteur propre de A^TA associé à une valeur propre λ de module maximal, qui est non nulle d'après l'hypothèse $\rho\left(A^TA\right) > 0$.

4. Éventuelle car si la multiplicité algébrique de 0 est n, on les a déjà toutes, auquel cas $\lambda = 0$.
5. Qui découle de la continuité du déterminant.

Alors $AA^TAu = A\lambda u = \lambda Au$. En outre, puisque $\lambda \neq 0$ et $A^TAu = \lambda u \neq 0$, on a $Au \neq 0$. Par conséquent, Au est un vecteur propre de AA^T pour la valeur propre λ, ce qui prouve que

$$\rho\left(A^TA\right) \leq \rho\left(AA^T\right). \tag{3}$$

Dans le cas où $\rho\left(A^TA\right) = 0$, on a aussi $\rho\left(AA^T\right) = 0$. En effet, dans le cas contraire, on peut appliquer (3) dans le cas strictement positif avec A^T à la place de A, d'où $0 < \rho\left(AA^T\right) \leq \rho\left(A^TA\right)$, ce qui est absurde. L'inégalité (3) est donc vraie dans tous les cas. En l'appliquant avec A^T au lieu de A, on obtient l'inégalité inverse, donc l'égalité.

2. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors A est diagonalisable en base orthonormée. Dans une telle base, la matrice de $A^TA = A^2$ est $\operatorname{diag}(\mu_1^2, \ldots, \mu_n^n)$ où les μ_i sont les valeurs propres de A. On a donc $\rho\left(A^TA\right) = \rho(A)^2$ et donc $|||A|||_2 = \rho(A)$. Comme ρ coïncide avec $|||\cdot|||_2$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, c'est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Solution 4. 1. De $Au = b$ et $A\tilde{u} = \tilde{b}$, on tire $A(u - \tilde{u}) = b - \tilde{b}$, c'est-à-dire $u - \tilde{u} = A^{-1}\left(b - \tilde{b}\right)$. Utilisant la propriété de sous-multiplicativité $\|Mx\| \leq |||M||| \|x\|$ des normes subordonnées, il vient

$$\|u - \tilde{u}\| \leq \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right| \left\|b - \tilde{b}\right\|. \tag{4}$$

Par ailleurs, de $Au = b$, on tire $\|b\| = \|Au\| \leq |||A||| \|u\|$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{\|u\|} \leq \frac{|||A|||}{\|b\|}. \tag{5}$$

En multipliant (4) et (5), on obtient le résultat demandé.

2. De $Au = b = \hat{A}\hat{u}$, on tire

$$\begin{aligned} A(u - \hat{u}) &= b - A\hat{u} \\ &= \hat{A}\hat{u} - A\hat{u} \\ &= \left(\hat{A} - A\right)\hat{u}, \end{aligned}$$

d'où

$$u - \hat{u} = A^{-1}\left(\hat{A} - A\right)\hat{u}.$$

Par conséquent, $\|u - \hat{u}\| \leq \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right| \left|\left|\left|\hat{A} - A\right|\right|\right| \|\hat{u}\|$, d'où

$$\frac{\|u - \hat{u}\|}{\|\hat{u}\|} \leq \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right| \left|\left|\left|\hat{A} - A\right|\right|\right| = \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right| |||A||| \frac{\left|\left|\left|\hat{A} - A\right|\right|\right|}{|||A|||} = \operatorname{cond}(A) \frac{\left|\left|\left|\hat{A} - A\right|\right|\right|}{|||A|||}.$$

3. On a

$$1 = |||\mathrm{I}_n||| = \left|\left|\left|AA^{-1}\right|\right|\right| \leq |||A||| \left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right| = \operatorname{cond}(A).$$

4. D'après la première égalité de l'exercice précédent, $|||A||| = \rho\left(A^TA\right)$. De l'autre égalité de l'exercice précédent appliquée à A^{-1}, on tire $\left|\left|\left|A^{-1}\right|\right|\right| = \rho\left(A^{-1}\left(A^{-1}\right)^T\right) = \rho\left(\left(A^TA\right)^{-1}\right)$. Les valeurs propres de $\left(A^TA\right)^{-1}$ sont les inverses de celles de A^TA, qui sont positives. Par conséquent,

$$\rho\left(\left(A^TA\right)^{-1}\right) = \frac{1}{\lambda_1\left(A^TA\right)}$$

où λ_1 désigne la plus petite valeur propre. D'où

$$\operatorname{cond}(A) = \frac{\rho\left(A^TA\right)}{\lambda_1\left(A^TA\right)}.$$

5. Si A est orthogonale, alors $A^TA = \mathrm{I}_n$, donc la seule valeur propre de A^TA est 1, donc la question précédente montre que $\operatorname{cond}(A) = \frac{1}{1} = 1$.

Solution 5. 1. Soit $\|\cdot\|$ telle que $|||\cdot|||$ est subordonnée à $\|\cdot\|$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit u un vecteur propre associé à une valeur propre λ de A de module $\rho(A)$. On a $|||A||| \geq \frac{\|Au\|}{\|u\|} = |\lambda| = \rho(A)$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et u un vecteur propre de A associée à une valeur propre λ de A de module $\rho(A)$. Comme $u \neq 0$, il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $uv^T \neq 0$ (v^T étant une matrice ligne, uv^T est une matrice de taille n). On a alors $\lambda uv^T = Auv^T$. En prenant la norme, il vient
$$\rho(A)\left\|uv^T\right\| = \left\|Auv^T\right\| \leq \|A\|\left\|uv^T\right\|.$$
Comme $uv^T \neq 0$, en divisant par $\left\|uv^T\right\|$, on obtient le résultat.

3. L'hypothèse signifie que -1 est valeur propre de M, en particulier $\rho(M) \geq 1$, donc $\|M\| \geq \rho(M) \geq 1$.

4. Soit $t \in \mathbb{C}$ différent de tous les λ_i. On a
$$\begin{aligned}P^{-1}(A+\varepsilon-t\mathrm{I}_n)P &= D + P^{-1}\varepsilon P - t\mathrm{I}_n\\ &= D - t\mathrm{I}_n + P^{-1}\varepsilon P\\ &= (D-t\mathrm{I}_n)\left(\mathrm{I}_n + (D-t\mathrm{I}_n)^{-1}P^{-1}\varepsilon P\right)\end{aligned}$$
où on a pu inverser $D - t\mathrm{I}_n$ parce que t n'est pas valeur propre de D.

5. Sous l'hypothèse supplémentaire, le membre gauche de l'égalité précédente n'est pas inversible, donc le membre de droite non plus. Comme $D - t\mathrm{I}_n$ reste inversible, c'est que $\mathrm{I}_n + (D-t\mathrm{I}_n)^{-1}P^{-1}\varepsilon P$ n'est pas inversible. D'après la question 3, on a donc
$$1 \leq \left\|(D-t\mathrm{I}_n)^{-1}P^{-1}\varepsilon P\right\| \leq \left\|(D-t\mathrm{I}_n)^{-1}\right\|\left\|P^{-1}\right\|\|\varepsilon\|\|P\|$$
où la deuxième inégalité provient de la sous-multiplicativité de la norme. D'après l'hypothèse sur la norme des matrices diagonales, on a $\left\|(D-t\mathrm{I}_n)^{-1}\right\| = \max_{1\leq i\leq n}\dfrac{1}{|\lambda_i - t|}$. En particulier, il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $\left\|(D-t\mathrm{I}_n)^{-1}\right\| = \frac{1}{|\lambda_j - t|}$, d'où
$$|\lambda_j - t| \leq \left\|P^{-1}\right\|\|\varepsilon\|\|P\| = \mathrm{cond}(P)\|\varepsilon\|,$$
autrement dit
$$t \in D_j.$$
En conclusion, les valeurs propres de $A+\varepsilon$ sont soit dans l'union des D_i, soit égales à l'un des λ_i auquel cas elles sont encore dans l'union des D_i.

Solution 6. 1. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$ et $|||\cdot|||$ la norme subordonnée associée. Soit $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ de module maximal. Alors
$$\frac{\|Au\|}{\|u\|} = \frac{|\lambda|\|u\|}{\|u\|} = \rho(A),$$
donc
$$|||A||| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Au\|}{\|u\|} = \rho(A).$$
Par conséquent, pour toute norme subordonnée $|||\cdot|||$, $|||A||| \geq \rho(A)$, d'où
$$\rho(A) \leq \inf\left\{|||A|||\ ;\ |||\cdot|||\text{ est une norme subordonnée}\right\}.$$
Pour montrer l'autre inégalité, nous allons construire une suite de normes subordonnées $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (qui va dépendre de A !) telle que $N_k(A) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \rho(A)$. Ce n'est pas facile mais c'est un résultat à avoir vu au moins une fois.

Partons de la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ et calculons sa norme subordonnée $|||\cdot|||_\infty$. On a, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^n$,
$$\begin{aligned}\|Mx\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq n}\left|\sum_{j=1}^n M_{i,j}x_j\right|\\ &\leq \|x\|_\infty \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n |M_{i,j}|,\end{aligned}$$

donc $|||M|||_\infty \leq \sum_{j=1}^n |M_{i,j}|$. Choisissant i_0 tel que $\sum_{j=1}^n |M_{i_0,j}| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^n |M_{i,j}|$. On écrit $M_{i_0,j} = |M_{i_0,j}|\, e^{\mathbf{i}\theta_j}$ (où l'écriture $\mathbf{i}$ désigne le nombre complexe usuel, pour ne pas le confondre avec l'indice, écrit i) pour $j \in [\![1, n]\!]$. On pose $u = \left(e^{-\mathbf{i}\theta_1}, \ldots, e^{-\mathbf{i}\theta_n}\right)$. De cette façon, $\|u\|_\infty = 1$ et

$$\begin{aligned}
\|Mu\|_\infty &= \max_{1\leq i\leq n} \left| \sum_{j=1}^n M_{i,j} e^{-\mathbf{i}\theta_j} \right| \\
&\geq \left| \sum_{j=1}^n M_{i_0,j} e^{-\mathbf{i}\theta_j} \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^n |M_{i_0,j}|\, e^{\mathbf{i}\theta_j} e^{-\mathbf{i}\theta_j} \right| \\
&= \sum_{j=1}^n |M_{i_0,j}| \\
&= \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |M_{i,j}|\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, $|||M|||_\infty \geq \frac{\|Mu\|_\infty}{\|u\|_\infty} = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^n |M_{i,j}|$. Par double inégalité, il y a égalité.

Fixons une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et posons $\|x\|_{\infty,P} = \|Px\|_\infty$ pour $x \in \mathbb{C}^n$. Il est facile de voir que c'est une norme sur $\mathbb{C}^n$. De plus, en notant $|||\cdot|||_{\infty,P}$ sa norme subordonnée, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$$|||M|||_{\infty,P} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Mx\|_{\infty,P}}{\|x\|_{\infty,P}} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|PMx\|_\infty}{\|Px\|_\infty} = \sup_{y\neq 0} \frac{\|PMP^{-1}y\|_\infty}{\|y\|_\infty} = \left|\left|\left| PMP^{-1} \right|\right|\right|_\infty,$$

où la troisième égalité vient du fait que $\{Px\ ;\ x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\} = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.
Trigonalisons maintenant la matrice A. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de trigonalisation et $T = (T_{i,j})$ la matrice triangulaire supérieur de A dans cette base. Dans la base $B_k = \left(e_1, \frac{1}{k}e_2, \frac{1}{k^2}e_3, \ldots, \frac{1}{k^{n-1}}e_n\right)$ la matrice de A est $T_k := \left(\frac{T_{i,j}}{k^{j-i}}\right)_{1\leq i,j\leq n}$. Comme $T_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{diag}\,(T_{1,1}, \ldots, T_{n,n})$, on a $|||T_k|||_\infty \xrightarrow[k\to+\infty]{} |||\mathrm{diag}\,(T_{1,1}, \ldots, T_{n,n})|||_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |T_{i,i}| = \rho(A)$, la dernière égalité venant du fait que les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de A. Mais par formule de changement de base, il existe une matrice $P_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P_k A P_k^{-1} = T_k$. On a alors $|||T_k|||_\infty = |||A|||_{\infty,P_k}$. Ainsi, $|||A|||_{\infty,P_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \rho(A)$. Par conséquent,

$$\rho(A) \geq \inf\left\{|||A|||\ ;\ |||\cdot|||\text{ est une norme subordonnée}\right\}.$$

Par double inégalité, on a l'égalité demandée.

2. Facile avec la première question.
3. Il suffit de prendre une norme subordonnée telle que $|||A||| < 1$ et d'observer que la série en question converge absolument, donc converge (la convergence absolue entraînant la convergence car $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est complet car de dimension finie).
4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité toujours vraie entre norme subordonnée et rayon spectral, on a $\left|\left|\left|A^k\right|\right|\right|^{1/k} \geq \rho\left(A^k\right)^{1/k}$. En trigonalisant, on voit bien que $\rho\left(A^k\right) = \rho(A)^k$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\left|\left|\left|A^k\right|\right|\right|^{1/k} \geq \rho(A)$.
   Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\rho\left(\frac{A}{\rho(A)+\varepsilon}\right) = \frac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon} < 1$, donc $\frac{A^k}{(\rho(A)+\varepsilon)^k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ d'après ce qui précède. Par conséquent, $\left|\left|\left|\frac{A^k}{(\rho(A)+\varepsilon)^k}\right|\right|\right| \leq 1$ à partir d'un certain rang, d'où $\left|\left|\left|A^k\right|\right|\right|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$ à partir d'un certain rang. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang K tel que pour tout $k \geq K$, $\rho(A) \leq \left|\left|\left|A^k\right|\right|\right|^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$. Par définition, on a prouvé la limite demandée.

5. Soit N une norme quelconque et $|||\cdot|||$ une norme subordonnée. Par équivalence des normes en dimension finie, il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que $\alpha|||\cdot||| \leq N \leq \beta|||\cdot|||$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\alpha^{1/k}|||A^k|||^{1/k} \leq N\left(A^k\right)^{1/k} \leq \beta^{1/k}|||A^k|||^{1/k}.$$

Comme $\left(\alpha^{1/k}, \beta^{1/k}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} (1,1)$, le résultats acquis pour les normes subordonnées montre que les deux termes encadrant $N\left(A^k\right)^{1/k}$ convergent vers $\rho(A)$. On conclut avec le théorème des gendarmes.

Solution 7. Voir [5].

Solution 8. Démontrons par exemple la première égalité (la deuxième fait appel à un raisonnement proche). Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de f associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et F un sous-espace de E de dimension k. On observe que $F \cap \mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_n) \neq \{0\}$. En effet, si c'était le cas, ces deux espaces seraient en somme directe, et on aurait $\dim(F \oplus \mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_n)) = \dim F + \dim \mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_n) = k + n - k + 1 = n + 1 > \dim E$, ce qui est impossible. Soit $x \in F \cap \mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_n) \setminus \{0\}$, qu'on peut, quitte à le diviser par sa norme, supposer de norme 1. On décompose x sous la forme $x = \sum_{j=k}^n x_j e_j$. On a alors

$$\langle f(x), x\rangle = \left\langle \sum_{j=k}^n \lambda_j x_j e_j, \sum_{i=1}^n x_j e_j \right\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^2 \geq \lambda_k \sum_{j=k}^n x_j^2 = \lambda_k.$$

Par conséquent, $\max\limits_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle \geq \lambda_k$ (où le minimum existe bien par un argument de continuité-compacité). Ceci étant vrai pour tout $F \in \mathrm{S}_k$, on a

$$\inf_{F\in\mathrm{S}_k} \max_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle \geq \lambda_k.$$

Mais pour $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$, on a, en décomposant $x \in F$ tel que $\|x\| = 1$ en $x = x_1e_1 + \ldots + x_ke_k$,

$$\langle f(x), x\rangle = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j^2 \leq \lambda_k \sum_{j=1}^k x_j^2 = \lambda_k,$$

donc $\max\limits_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle \leq \lambda_k$, et comme $\langle f(e_k), e_k\rangle = \lambda_k$, on a même $\max\limits_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle = \lambda_k$. Par conséquent,

$$\inf_{F\in\mathrm{S}_k} \max_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle \leq \lambda_k.$$

Par double inégalité, on a donc

$$\inf_{F\in\mathrm{S}_k} \max_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle = \lambda_k.$$

et comme la borne inférieure est atteinte pour $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$, c'est bien un minimum.

Solution 9. 1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. D'après l'hypothèse, on a

$$\min_{F\in\mathrm{S}_k} \max_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} \langle f(x), x\rangle \leq \min_{F\in\mathrm{S}_k} \max_{\substack{x\in F\\ \|x\|=1}} \langle g(x), x\rangle,$$

c'est-à-dire, d'après le théorème du minimax,

$$\lambda_k \leq \mu_k.$$

2. (a) Soit $x, y \in G$. Comme f et p sont autoadjoints (p l'est car c'est un projecteur orthogonal) et p laisse G invariant, on a

$$\langle g(x), y\rangle = \langle p \circ f(x), y\rangle = \langle f(x), p(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle = \langle p(x), f(y)\rangle = \langle x, p \circ f(y)\rangle = \langle x, g(y)\rangle$$

donc g est autoadjoint.

(b) On applique le théorème du minimax à f et à g : en notant S_k^E l'ensemble des sous-espaces de E de dimension k et S_k^G l'ensemble des sous-espaces de G de dimension k, on a

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k = \min_{F \in \mathrm{S}_k^E} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} \langle f(x), x \rangle = \max_{F \in \mathrm{S}_{n-k+1}^E} \min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} \langle f(x), x \rangle$$

et

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad \mu_k = \min_{F \in \mathrm{S}_k^G} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} \langle g(x), x \rangle = \max_{F \in \mathrm{S}_{n-k}^G} \min_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} \langle g(x), x \rangle.$$

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Si $F \in \mathrm{S}_k^G$ et $x \in F$, on a $\langle g(x), x \rangle = \langle p \circ f(x), x \rangle = \langle f(x), p(x) \rangle = \langle f(x), x \rangle$, donc

$$\mu_k = \min_{F \in \mathrm{S}_k^G} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} \langle g(x), x \rangle = \min_{F \in \mathrm{S}_k^G} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} \langle f(x), x \rangle,$$

Comme $\mathrm{S}_k^G \subset \mathrm{S}_k^E$, on a

$$\min_{F \in \mathrm{S}_k^E} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} \langle f(x), x \rangle \leq \min_{F \in \mathrm{S}_k^G} \max_{\substack{x \in F \\ \|x\|=1}} \langle f(x), x \rangle,$$

c'est-à-dire

$$\lambda_k \leq \mu_k.$$

Le même type de raisonnement en utilisant l'autre égalité du théorème du minimax conduit à

$$\mu_k \leq \lambda_{k+1}.$$

Références

[1] Philippe G. Ciarlet. Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation. Dunod.

[2] Philippe Caldero et Marie Peronnier. Carnet de voyage en Algébrie. Calvage et Mounet.

[3] Roger Mansuy et Rached Mneimné. Algèbre linéaire - Réduction des endomorphismes. De Boeck.

[4] Grégoire Allaire et Sidi Mahmoud Kaber. Algèbre linéaire numérique. Ellipses.

[5] Serge Nicolas Serge Francinou, Hervé Gianella. Oraux X-ENS - Algèbre 2. Cassini.

[6] Serge Nicolas Serge Francinou, Hervé Gianella. Oraux X-ENS - Algèbre 3. Cassini.

[7] Serge Nicolas Serge Francinou, Hervé Gianella. Oraux X-ENS - Tome 7. Cassini.