Devoir maison : théorème de Rolle aux limites et de Darboux. Correction.

Solution 1. — *Théorème de Rolle aux limites.*

1. Si f est constante, alors f' est identiquement nulle. On peut donc prendre n'importe quel $c \in \mathbb{R}$.
2. Supposons par exemple que $f(x_0) > \ell$ (le cas où l'inégalité est dans l'autre sens se traite de manière similaire). Alors $\ell < y < f(x_0)$.

   Il est intéressant de faire un dessin comme celui de la figure 1 pour guider le raisonnement. Faisant varier x de x_0 vers $-\infty$, on observe que $f(x)$ varie continûment de $f(x_0)$ vers ℓ. On voit alors que $f(x)$ va passer par y et on devine que le théorème des valeurs intermédiaires devrait nous aider à le prouver.

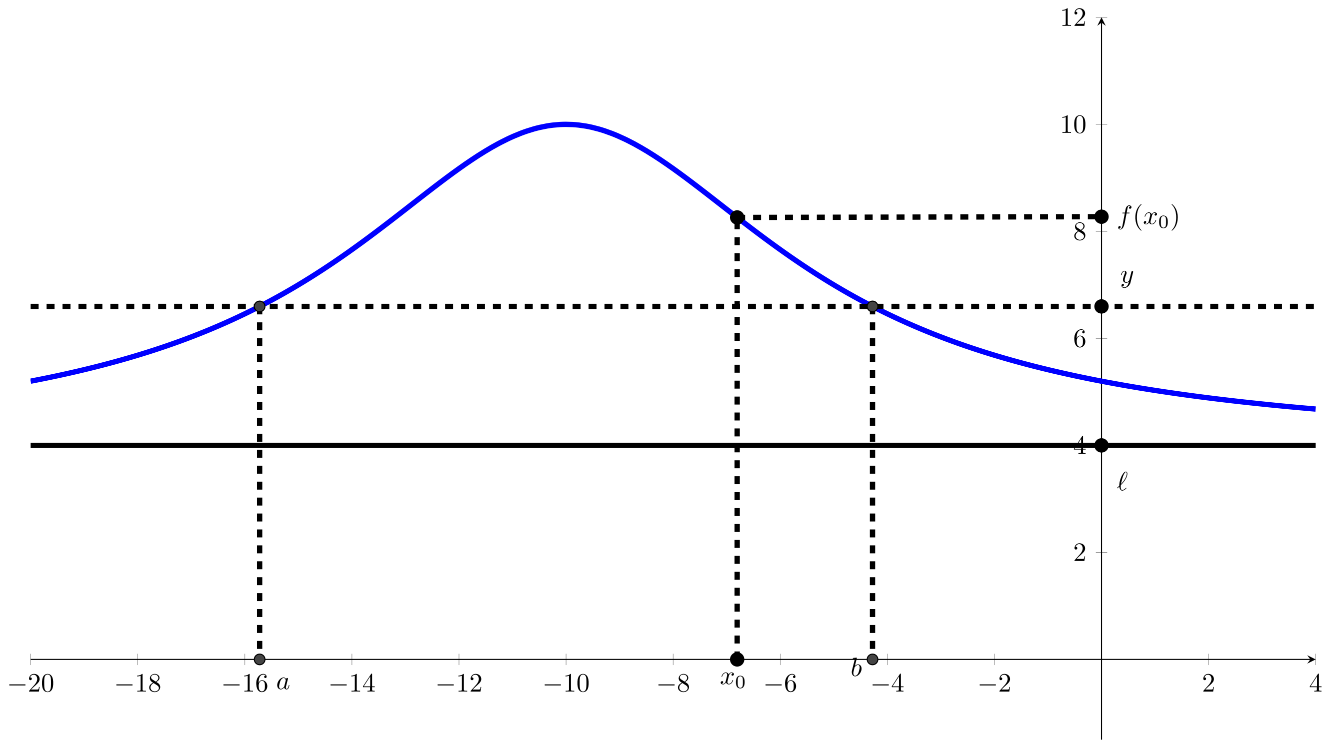

Figure 1 – Illustration de la question 2.

   Pour pouvoir appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, utilisons la définition de $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \ell$ avec $\varepsilon = \frac{y-\ell}{2}$ (qui est bien un nombre strictement positif). Elle nous indique qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \leqslant t$, $\ell - \frac{y-\ell}{2} \leqslant f(x) \leqslant \ell + \frac{y-\ell}{2}$. En particulier, en prenant $x = \min(t, x_0 - 1)$ (qui est bien un nombre inférieur à t) et l'inégalité de droite précédente, on obtient $f(x) \leqslant \ell + \frac{y-\ell}{2} = \frac{y+\ell}{2}$. Or $\ell < y$, donc $\frac{y+\ell}{2} < \frac{y+y}{2} = y$, si bien que $f(x) < y$. En outre, $f(x_0) > y$ et f est continue, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in [x, x_0]$ [1] tel que

$$f(a) = y.$$

1. L'intervalle est bien dans ce sens car $x < x_0$. C'est pour cela qu'on a pris le min avec $x_0 - 1$.

On a $a \leqslant x_0$, et on ne peut pas avoir $a = x_0$ car $f(x_0) \neq y = f(a)$, donc $a < x_0$. Ainsi, a répond à la question posée.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est donc *a fortiori*[2] continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, et la question précédente montre que $f(a) = f(b)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Solution 2. — *Théorème de Darboux.* 1. La fonction h est dérivable, donc elle est continue. Sa restriction au segment $[a,b]$ est donc une fonction continue sur un segment. D'après le théorème des bornes atteintes, elle admet un maximum (et aussi un minimum).

2. Par définition du nombre dérivé, on a $\frac{h(x)-h(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a^+]{} h'(a)$. Par définition de la limite à droite[3], cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a, a+\delta]$, $h'(a) - \varepsilon \leqslant \frac{h(x)-h(a)}{x-a} \leqslant h'(a) + \varepsilon$. En particulier, en appliquant l'inégalité de gauche à $\varepsilon = \frac{h'(a)}{2}$ (ce qui est possible car $h'(a) > 0$), on obtient l'existence de $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a, a+\delta]$, $\frac{h'(a)}{2} \leqslant \frac{h(x)-h(a)}{x-a}$. En particulier, si $x \in]a, a+\delta]$, alors $0 < \frac{h(x)-h(a)}{x-a}$, et donc en multipliant par le nombre strictement positif $x - a$, on obtient $h(x) - h(a) > 0$, c'est-à-dire $h(x) > h(a)$. Par conséquent, le maximum de h sur $[a,b]$ ne peut pas être atteint en a.
De même, le maximum de h sur $[a,b]$ ne peut pas être atteint en b.

3. Puisque le maximum de h sur $[a,b]$ n'est atteint ni en a, ni en b, il s'agit aussi du maximum de h sur $]a,b[$. Notons $c \in]a,b[$ un point où ce maximum est atteint. Rappelons qu'une fonction dérivable définie sur un intervalle **ouvert** voit sa dérivée s'annuler en tout point où elle atteint un extremum local. On a donc $h'(c) = 0$.

4. Soit $y \in [g'(a), g'(b)]$. Si $y = g'(a)$, il suffit de prendre $c = a$. De même, si $y = g'(b)$, il suffit de prendre $c = b$. Reste le cas où $y \in]g'(a), g'(b)[$. Suivons l'indication et posons $h_y \;:\; \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & yx - g(x) \end{array}$. La fonction h_y est dérivable sur I en tant que différence de deux fonctions dérivables sur I (à savoir $x \mapsto yx$ et g). De plus, $h_y'(a) = y - g'(a) > 0$ et $h_y'(b) = y - g'(b) < 0$ (les inégalités découlant de $y \in]g'(a), g'(b)[$). D'après la question précédente, il existe donc $c \in]a,b[$ tel que $h_y'(c) = 0$, c'est-à-dire $y - g'(c) = 0$, et donc $y = g'(c)$.

5. La fonction g est dérivable en tout point différent de 0 en tant que composée et produit de fonctions dérivables, et pour tout $x \neq 0$, $g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\frac{-1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.
En 0, les théorèmes habituels ne s'appliquent pas. On doit revenir à la définition et étudier le taux d'accroissement. Soit $x \neq 0$. Alors $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x-0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Comme les valeurs de sin sont comprises entre -1 et 1, on obtient l'encadrement $-|x| \leqslant \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \leqslant |x|$. Or $-|x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ et $|x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, donc par théorème d'encadrement (aussi appelé théorème des gendarmes), on en déduit que $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Ainsi, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

6. On doit montrer que $g'(x)$ ne converge pas vers $g'(0)$ quand x tend vers 0, c'est-à-dire que $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ne converge pas vers 0 quand x tend vers 0.
Supposons par l'absurde que ce soit le cas. En utilisant l'encadrement du sinus entre -1 et 1 comme précédemment, on obtient $-2|x| \leqslant 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 2|x|$, donc par théorème d'encadrement, $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Par conséquent, $\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - g'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Or $\frac{1}{y} \xrightarrow[y \to +\infty]{} 0$, donc par composition, $\cos(y) = \cos\left(\frac{1}{\frac{1}{y}}\right) \xrightarrow[y \to +\infty]{} 0$.
C'est absurde car on a vu en cours que cos n'a pas de limite en $+\infty$.

2. Locution latine signifiant « à plus forte raison », souvent utilisée en maths.
3. On n'a qu'une limite à droite car a est l'extrémité gauche de l'ensemble de définition.