Devoir maison : théorèmes de Rolle aux limites et de Darboux.

Ce devoir est **facultatif**.

Exercice 1. — *Théorème de Rolle aux limites.*
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ et $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \ell$.
On veut montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.
Le nom « théorème de Rolle aux limites » vient du fait qu'on a remplacé l'hypothèse $f(a) = f(b)$ du théorème de Rolle par $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

1. Traiter le cas où f est constante.

On suppose désormais que f n'est pas constante. Il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq \ell$.

2. Soit $y \in \mathbb{R}$ strictement compris entre ℓ et $f(x_0)$. Montrer qu'il existe $a < x_0$ tel que $f(a) = y$.

De même, il existe $b > x_0$ tel que $f(b) = y$ (on ne demande pas de le démontrer, mais on pourra l'utiliser).

3. Conclure.

Exercice 2. — *Théorème de Darboux.*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires lorsque pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$ et tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.
Le théorème des valeurs intermédiaires se reformule donc en « toute fonction **continue** sur un intervalle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires ».
Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Darboux, qui indique que pour toute fonction dérivable $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, la dérivée g' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

1. Soit $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Montrer que la restriction de h au segment $[a, b]$ possède un maximum.
2. On suppose que $h'(a) > 0$ et $h'(b) < 0$. Montrer, à l'aide de la définition du nombre dérivé, que le maximum de h sur $[a, b]$ ne peut être atteint ni en a, ni en b.
3. En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$.
4. Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $g'(a) \leqslant g'(b)$ (le cas où $g'(a) > g'(b)$ se traite de manière similaire). Montrer que pour tout $y \in [g'(a), g'(b)]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g'(c) = y$.
   Indication : si $y \in]g'(a), g'(b)[$, on appliquera la question précédente à $h_y \ : \ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & yx - g(x) \end{array}$.

On a donc démontré le théorème de Darboux. On donne maintenant une fonction pour laquelle le théorème de Darboux s'applique alors que le théorème des valeurs intermédiaires ne s'applique pas, autrement dit une fonction qui est une dérivée mais qui n'est pas continue.

5. Soit $g \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \longmapsto & x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ 0 & \longmapsto & 0 \end{array}$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
6. Montrer que g' n'est pas continue en 0.