Devoir maison : vocabulaire ensembliste et fonctions. Correction.

Ce devoir est facultatif.

Solution 1. 1. On procède par double inclusion. Soit $A, B \subset Y$.

(a) — $f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$: Soit $x \in f^{-1}(A \cup B)$. Alors $f(x) \in A \cup B$, donc $f(x) \in A$ ou $f(x) \in B$. Dans le premier cas, $x \in f^{-1}(A)$ et dans le deuxième cas, $x \in f^{-1}(B)$. On a donc toujours $x \in f^{-1}(A)$ ou $x \in f^{-1}(B)$, c'est-à-dire $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

— $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B)$: Soit $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Alors $x \in f^{-1}(A)$ ou $x \in f^{-1}(B)$, autrement dit $f(x) \in A$ ou $f(x) \in B$. On a donc $f(x) \in A \cup B$, c'est-à-dire $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

(b) — $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$: Soit $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Alors $f(x) \in A \cap B$, c'est-à-dire $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$. De $f(x) \in A$, on déduit que $x \in f^{-1}(A)$ et de $f(x) \in B$, on déduit que $x \in f^{-1}(B)$. Par conséquent, $x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$, c'est-à-dire $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

— $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$: Soit $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Alors $x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$, autrement dit $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$, c'est-à-dire $f(x) \in A \cap B$, et donc $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

2. Soit $C, D \subset X$.

(a) — $f(C \cup D) \subset f(C) \cup f(D)$: Soit $y \in f(C \cup D)$. Alors il existe $x \in C \cup D$ tel que $y = f(x)$. On a donc $x \in C$ ou $x \in D$. Dans le premier cas, $y = f(x) \in f(C)$ et dans le deuxième cas, $y \in f(D)$. On a donc $y \in f(C)$ ou $y \in f(D)$, autrement dit $y \in f(C) \cup f(D)$.

— $f(C) \cup f(D) \subset f(C \cup D)$: Soit $y \in f(C) \cup f(D)$. Alors $y \in f(C)$ ou $y \in f(D)$. Dans le premier cas, il existe $x \in C$ tel que $y = f(x)$ et dans le deuxième cas, il existe $x \in D$ tel que $y = f(x)$. Il existe donc toujours x appartenant à C ou à D, autrement dit $x \in C \cup D$, tel que $y = f(x)$. Par conséquent, $y \in f(C \cup D)$.

(b) Soit $y \in f(C \cap D)$. Alors il existe $x \in C \cap D$ tel que $y = f(x)$. On a donc $x \in C$ et $x \in D$. De $x \in C$, on déduit que $y = f(x) \in f(C)$ et de $x \in D$, on déduit que $y = f(x) \in f(D)$. Par conséquent, $y \in f(C)$ et $y \in f(D)$, donc $y \in f(C) \cap f(D)$.

3. Posons $X = Y = \mathbb{R}$, f la fonction constante égale à 5, $C = [-1, 0]$ et $D = [2, 3]$. Alors $C \cap D = \emptyset$, donc $f(C \cap D) = f(\emptyset) = \emptyset$. Mais $f(C) = f([-1, 0]) = \{5\}$ et $f(D) = f([2, 3]) = \{5\}$ car f est constante égale à 5, donc $f(C) \cap f(D) = \{5\} \cap \{5\} = \{5\}$. Comme $\emptyset \neq \{5\}$, on a bien $f(C \cap D) \neq f(C) \cap f(D)$.

4. — $\Longrightarrow$: Supposons que pour tous $C, D \subset X$, on a $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ et montrons que f est injective. Pour cela, considérons $x_1, x_2 \in X$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et montrons que $x_1 = x_2$. Notons $y = f(x_1) = f(x_2)$ et posons $C = \{x_1\}$ et $D = \{x_2\}$. Alors $f(C) = f(\{x_1\}) = \{y\}$ et $f(D) = f(\{x_2\}) = \{y\}$, donc $f(C) \cap f(D) = \{y\}$. Mais par hypothèse, $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$, donc $f(C \cap D) = \{y\}$, autrement dit $f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) = \{y\}$. En particulier, $f(\{x_1\} \cap \{x_2\})$ n'est pas vide, donc $\{x_1\} \cap \{x_2\}$ n'est pas vide, ce qui n'est possible que si $x_1 = x_2$. La fonction f est donc bien injective.

— $\Longleftarrow$: Supposons que f est injective et montrons que pour tous $C, D \subset X$, on a $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$. Soit $C, D \subset X$. On a déjà vu que $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$ en 2.(b), il ne reste donc plus que l'inclusion $f(C) \cap f(D) \subset f(C \cap D)$ à prouver. Soit $y \in f(C) \cap f(D)$, autrement dit $y \in f(C)$ et $y \in f(D)$. Comme $y \in f(C)$, il existe $x_C \in C$ tel que $y = f(x_C)$; de même, comme $y \in f(D)$, il existe $x_D \in D$ tel que $y = f(x_D)$. On a donc $y = f(x_C) = f(x_D)$. Or f est injective, donc $x_C = x_D$. Par conséquent, en posant $x = x_C = x_D$, on a $x \in C$ et $x \in D$, c'est-à-dire $x \in C \cap D$, et donc $y = f(x) \in f(C \cap D)$.

Solution 2. 1. Soit $A \subset X$. Soit $x \in A$, montrons que $x \in f^{-1}(f(A))$. Par définition de la préimage, cela revient à montrer que $f(x) \in f(A)$, ce qui est évident car $x \in A$.

2. Soit $B \subset Y$. Soit $y \in f\left(f^{-1}(B)\right)$, montrons que $y \in B$. Comme $y \in f\left(f^{-1}(B)\right)$, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Mais par définition de $f^{-1}(B)$, on a $f(x) \in B$, c'est-à-dire $y \in B$.
3. Prenons $X = Y = \mathbb{R}$ et f la fonction constante égale à 6. Prenons également $A = [0, 1]$. Alors $f(A) = f([0, 1]) = \{6\}$ car f est constante égale à 6. Donc $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{6\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 6\} = \mathbb{R}$. Comme $[0, 1] \neq \mathbb{R}$, on a bien $A \neq f^{-1}(f(A))$.

   Pour un exemple d'inclusion stricte dans la seconde inclusion, prenons les mêmes X, Y et f. Prenons $B = \{12\}$. Comme f ne prend pas la valeur 12, on a $f^{-1}(B) = f^{-1}(\{12\}) = \emptyset$, et donc $f\left(f^{-1}(B)\right) = f(\emptyset) = \emptyset$. Comme $\{12\} \neq \emptyset$, on a bien $B \neq f\left(f^{-1}(B)\right)$.
4. — $\underline{\Longrightarrow :}$ Supposons que pour tout $A \subset X$, $f^{-1}(f(A)) = A$ et montrons que f est injective.
   Pour cela, considérons $x_1, x_2 \in X$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$, et montrons que $x_1 = x_2$. Notons $y = f(x_1) = f(x_2)$ et posons $A = \{x_1\}$. Alors $f(A) = f(\{x_1\}) = \{y\}$. Par conséquent, $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(\{y\})$. Mais par hypothèse, $f^{-1}(f(A)) = A$, donc $f^{-1}(\{y\}) = \{x_1\}$. Mais $x_2 \in f^{-1}(\{y\})$ car $f(x_2) = y$. Donc $x_2 \in \{x_1\}$, autrement dit $x_2 = x_1$. Ceci prouve l'injectivité de f.

   — $\underline{\Longleftarrow :}$ Supposons que f est injective et montrons que pour tout $A \subset X$, $f^{-1}(f(A)) = A$.
   Soit $A \subset X$. On a déjà montré que $A \subset f^{-1}(f(A))$ en question 1. Il ne reste plus qu'à montrer que $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors $f(x) \in f(A)$, donc il existe $\tilde{x} \in A$ tel que $f(x) = f(\tilde{x})$. Par injectivité de f, on obtient $x = \tilde{x}$, et comme $\tilde{x} \in A$, on conclut bien que $x \in A$.
5. — $\underline{\Longrightarrow :}$ Supposons que pour tout $B \subset Y$, $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$ et montrons que f est surjective.
   Soit $y \in Y$. Posons $B = \{y\}$. Alors $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$, autrement dit $f\left(f^{-1}(\{y\})\right) = \{y\}$. En particulier, $f\left(f^{-1}(\{y\})\right)$ n'est pas vide, donc $f^{-1}(\{y\})$ n'est pas vide. On peut donc considérer $x \in f^{-1}(\{y\})$, et alors $f(x) = y$. On a trouvé un antécédent à chaque élément $y \in Y$, donc f est surjective.

   — $\underline{\Longleftarrow :}$ Supposons que f est surjective et montrons que pour tout $B \subset Y$, $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.
   Soit $B \subset Y$. On déjà prouvé que $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$ en question 2. Il ne reste plus qu'à prouver que $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$. Soit $y \in B$. En particulier, $y \in Y$, donc par surjectivité de f, il existe $x \in X$ tel que $f(x) = y$. Comme $y \in B$, cela entraîne que $f(x) \in B$, donc $x \in f^{-1}(B)$. Par conséquent, $y = f(x) \in f\left(f^{-1}(B)\right)$

Solution 3. Soit $y_1, y_2 \in Y$ tels que $y_1 < y_2$, montrons que $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.
Supposons par l'absurde que $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Alors par croissance de f, on aurait $y_1 = f\left(f^{-1}(y_1)\right) \geq f\left(f^{-1}(y_2)\right) = y_2$, ce qui contredit $y_1 < y_2$.