Devoir maison : vocabulaire ensembliste et fonctions.

Ce devoir est facultatif.

On rappelle que si $f : X \longrightarrow Y$ et $E \subset Y$, la préimage de E, notée $f^{-1}(E)$, est définie par $f^{-1}(E) = \{x \in X \mid f(x) \in E\}$. Elle existe même lorsque f n'est pas bijective, et il ne faut pas confondre cette notion avec la bijection réciproque, aussi notée f^{-1} (qui n'existe que lorsque f est bijective). De plus, elle n'a absolument rien à voir avec $\frac{1}{f}$!

Exercice 1. —
Soit X, Y deux ensembles, et $f : X \longrightarrow Y$.

1. Montrer que pour tous $A, B \subset Y$, on a :
   (a) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;
   (b) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
2. Montrer que pour tous $C, D \subset X$, on a :
   (a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$;
   (b) $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$.
3. Donner un exemple où l'inclusion précédente est stricte (c'est-à-dire où il n'y a pas égalité).
4. Montrer que l'on a $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ pour tous $C, D \subset X$ si et seulement si f est injective.

Exercice 2. —
Soit X, Y deux ensembles, et $f : X \longrightarrow Y$.

1. Montrer que pour tout $A \subset X$, $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que pour tout $B \subset Y$, $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.
3. Donner des exemples où les inclusions précédentes sont strictes.
4. Montrer que l'on a $f^{-1}(f(A)) = A$ pour tout $A \subset X$ si et seulement si f est injective.
5. Montrer que l'on a $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$ pour tout $B \subset Y$ si et seulement si f est surjective.

Exercice 3. —
Soit X, Y deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : X \longrightarrow Y$ une fonction bijective. On suppose que f est strictement croissante. Montrer que sa bijection réciproque f^{-1} est strictement croissante.