Université d'Angers
L1 DL MI – Analyse Élémentaire 2023-2024

Devoir maison : calculs d'intégrales. Correction.

Solution 1. — 1. Cela a été vu en cours. Le théorème fondamental de l'analyse indique que la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t \end{array}$ est cette primitive de ln. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour calculer $\int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t$, on utilise une intégration par parties. On pose, pour $t > 0$, $u(t) = t$ et $v(t) = \ln(t)$, de sorte que u et v soient de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t = \int_1^x u'(t)v(t)\mathrm{d}t$. Le théorème d'intégration par parties indique alors que

$$\begin{aligned}
\int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t &= \int_1^x u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\
&= [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\
&= [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x t\frac{1}{t}\mathrm{d}t \\
&= \boxed{x\ln(x) - (x-1).}
\end{aligned}$$

2. (a) Soit $x > 0$. On pose, pour $t > 0$, $u(t) = t$ et $v(t) = \ln(t)^{n+1}$, de sorte que u et v soient de classe $\mathcal{C}^1$ et que $F_{n+1}(x) = \int_1^x u'(t)v(t)\mathrm{d}t$. Une intégration par parties montre alors que

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(x) &= [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[t\ln(t)^{n+1}\right]_1^x - \int_1^x t\frac{n+1}{t}\ln(t)^n\mathrm{d}t \\
&= \boxed{x\ln(x)^{n+1} - (n+1)F_n(x).}
\end{aligned}$$

(b) Itérons cette relation pour deviner la formule. Soit $x > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= x\ln(x) - x + 1, \\
F_2(x) &= x\ln(x)^2 - 2(x\ln(x) - x + 1) \\
&= x\ln(x)^2 - 2x\ln(x) + 2x - 2, \\
F_3(x) &= x\ln(x)^3 - 3\left(x\ln(x)^2 - 2x\ln(x) + 2x - 2\right) \\
&= x\ln(x)^3 - 3x\ln(x)^2 + 3\cdot 2\cdot x\ln(x) - 3\cdot 2\cdot x + 3\cdot 2, \\
F_4(x) &= x\ln(x)^4 - 4x\ln(x)^3 + 4\cdot 3\cdot x\ln(x)^2 - 4\cdot 3\cdot 2\cdot x\ln(x) + 4\cdot 3\cdot 2\cdot x - 4\cdot 3\cdot 2.
\end{aligned}$$

On voit apparaître la formule

$$\boxed{F_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x\ln(x)^k + (-1)^{n+1}n!.}$$

Prouvons-la par récurrence sur n. On pose donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « pour tout $x > 0$, $F_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x\ln(x)^k + (-1)^{n+1}n!$ ».

— $\mathcal{P}(1)$ est vrai car $\sum_{k=0}^{1}(-1)^{1-k}\frac{1!}{k!}x\ln(x)^k+(-1)^{1+1}n! = -x+x\ln(x)+1 = F_1(x)$ (la dernière égalité provient de la question 1.).

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Soit $x > 0$. D'après la question 2.(a), on a

$$F_{n+1}(x) = x\ln(x)^{n+1} - (n+1)F_n(x).$$

Mais d'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$, on a $F_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x\ln(x)^k + (-1)^{n+1}n!$, si bien que

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(x) &= x\ln(x)^{n+1} - (n+1)\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x\ln(x)^k + (-1)^{n+1}n!\right)\\
&= x\ln(x)^{n+1} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+1-k}\frac{(n+1)!}{k!}x\ln(x)^k + (-1)^{n+2}(n+1)!\\
&\qquad \text{(on a } (-1)\times(-1)^{n-k} = (-1)^{n+1-k} \text{ et } (n+1)n! = (n+1)!\text{)}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\frac{(n+1)!}{k!}x\ln(x)^k + (-1)^{n+2}(n+1)!.\\
&\qquad \text{(le terme pour } k=n+1 \text{ est exactement le } x\ln(x)^{n+1} \text{ de la ligne précédente)}
\end{aligned}$$

Ceci prouve $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la preuve par récurrence.

Solution 2. — 1. D'après le théorème fondamental de l'analye, la fonction $F : x \geqslant 0 \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de f valant 0 en 0. Par produit, on en déduit que G est dérivable et que pour tout $x \geqslant 0$,

$$G'(x) = -ce^{-cx}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + e^{-cx}f(x) = e^{-cx}\left(f(x) - c\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right).$$

Or par hypothèse, $f(x) - c\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$. En multipliant par e^{-cx} (qui est positif), il vient que pour tout $x \geqslant 0$,

$$\boxed{G'(x) \leqslant 0.}$$

Par conséquent, G est décroissante. En particulier, pour tout $x \geqslant 0$, $G(x) \leqslant G(0)$, c'est-à-dire

$$e^{-cx}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

En multipliant par e^{cx} (qui est positif), on obtient que pour tout $x \geqslant 0$,

$$\boxed{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \leqslant 0.}$$

2. Soit $x \geqslant 0$. Comme f est positive, on a aussi (par croissance de l'intégrale) $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$, d'où finalement

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0. \tag{1}$$

Rappelons à nouveau que, d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $F : x \geqslant 0 \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f. Par conséquent, en dérivant (1), on obtient que pour tout $x \geqslant 0$,

$$\boxed{f(x) = 0.}$$