Université d'Angers
L1 DL MI – Analyse Élémentaire 2023-2024

Devoir maison : calculs d'intégrales.

Ce devoir est facultatif.

Exercice 1. — 1. Calculer la primitive de ln qui vaut 0 en 1.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\begin{array}{rccc} F_n & : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x (\ln(t))^n \, \mathrm{d}t \end{array}$.
   (a) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer F_{n+1} à partir de F_n.
   (b) En déduire une formule générale pour F_n (que l'on exprimera à l'aide du symbole somme « $\sum$ »). *Commencer par calculer F_1, F_2, F_3 voire même F_4 pour deviner la formule générale puis la prouver.*

Exercice 2. —
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive continue. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq c \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \leq 0$.
   On s'intéressera aux variations de la fonction $\begin{array}{rccc} G & : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & e^{-cx} \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}$ *pour comparer $G(x)$ et $G(0)$.*
2. Montrer que f est la fonction nulle.