Exercice 1. —
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
On suppose que que $f(x) + f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$

Correction de l'exercice 1. Pour montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$, posons $g = f + f'$ et observons que f est solution du problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} y' + y = g \\ y(0) = f(0) \end{array}\right.$.

Résolvons ce problème de Cauchy. Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda e^{-x}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Cherchons une solution particulière de $y' + y = g$ sous la forme $h : x \mapsto \lambda(x)e^{-x}$ avec λ une fonction dérivable. La fonction h est solution si et seulement si pour tout $x \geqslant 0$, $\lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x} + \lambda(x)e^{-x} = g(x)$, c'est-à-dire $\lambda'(x) = e^x g(x)$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, $h : x \mapsto e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t g(t)\,\mathrm{d}t$ est une solution particulière de l'équation, dont l'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda e^{-x} + e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t g(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

La seule de ces fonctions qui vaut $f(0)$ en 0 est obtenue pour $\lambda = f(0)$. Ainsi,

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f(x) = f(0)e^{-x} + e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Rappelons que $g = f + f'$ converge vers ℓ en $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $a \geqslant 0$ tel que pour tout $t \geqslant a$, $\ell - \varepsilon \leqslant g(t) \leqslant \ell + \varepsilon$. Par conséquent, en écrivant f sous la forme précédente et en coupant l'intégrale en deux au niveau de a, on obtient que pour tout $x \geqslant a$,

$$f(0)e^{-x} + e^{-x}\int_0^a e^t g(t)\,\mathrm{d}t + (\ell-\varepsilon)e^{-x}\int_a^x e^t\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant f(0)e^{-x} + e^{-x}\int_0^a e^t g(t)\,\mathrm{d}t + (\ell+\varepsilon)e^{-x}\int_a^x e^t\,\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire, en calculant les intégrales entre a et x,

$$f(0)e^{-x} + e^{-x}\int_0^a e^t g(t)\,\mathrm{d}t + (\ell-\varepsilon)(1-e^{a-x})\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant f(0)e^{-x} + e^{-x}\int_0^a e^t g(t)\,\mathrm{d}t + (\ell+\varepsilon)(1-e^{a-x}).$$

Le membre de gauche converge vers $\ell - \varepsilon$ lorsque x tend vers $+\infty$, et celui de droite vers $\ell + \varepsilon$. Par conséquent, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geqslant A$,

$$\ell - 2\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + 2\varepsilon.$$

On a ainsi montré en revenant à la définition par les ε que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.