Correction du devoir maison : logarithme, exponentielle.

1 Logarithme

1. Commençons par l'existence. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est continue d'après le cours. Par conséquent, d'après le résultat admis, elle admet une primitive G. Posons $F = G - G(1)$. Alors F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car la fonction G et la constante $G(1)$ le sont et $F' = G' - 0 = f$, donc F est une primitive de f, autrement dit pour tout $x > 0$, $F'(x) = \frac{1}{x}$. En outre, $F(1) = G(1) - G(1) = 0$. Ceci montre l'existence.
   Passons à l'unicité. Supposons qu'il existe deux fonctions F_1, F_2 répondant à l'énoncé. Alors $F_1 - F_2$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$. Par conséquent, $F_1 - F_2$ est constante, et comme $F_1(1) - F_2(1) = 0 - 0 = 0$, on conclut que $F_1 - F_2$ est identiquement nulle, c'est-à-dire $F_1 = F_2$. Ceci prouve l'unicité.
2. Par définition, ln est dérivable et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$, donc ln est strictement croissante.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait déjà que $\ln(1) = 0$. En outre, puisque ln est strictement croissante, si $x < 1$, on a $\ln(x) < \ln(1) = 0$ tandis que si $x > 1$, on a $\ln(x) > \ln(1) = 0$.
3. (a) Notons d'abord que g est bien définie : pour tout $x > 0$, $ax > 0$ donc $\ln(ax)$ existe bien.
   Par composition de deux fonctions dérivables (la fonction ln et la fonction $x \mapsto ax$), g est dérivable et pour tout $x > 0$, $g'(x) = a\ln'(ax) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$.
   (b) D'après ce qui précède, $g - \ln$ est dérivable (c'est la différence de deux fonctions dérivables) et pour tout $x > 0$, $g'(x) - \ln'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$. Par conséquent, $g - \ln$ est constante.
   (c) La fonction $g - \ln$ est constante et $g(1) - \ln(1) = \ln(a) - \ln(1) = \ln(a)$. Par conséquent, $g - \ln$ est constamment égale à $\ln(a)$. Autrement dit pour tout $x > 0$, $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$. C'est a fortiori vrai pour $x = b$, donc $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
4. Soit $a > 0$. Posons, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$: « $\ln\left(a^k\right) = k\ln(a)$ ».
   - **Initialisation :** Pour $k = 1$, l'égalité à prouver est $\ln(a) = \ln(a)$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vrai.
   - **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ et montrons $\mathcal{P}(k+1)$. On a $\ln\left(a^{k+1}\right) = \ln\left(a^k a\right)$. D'après la question 3., on en déduit que $\ln\left(a^{k+1}\right) = \ln\left(a^k\right) + \ln(a)$. Mais d'après $\mathcal{P}(k)$, $\ln\left(a^k\right) = k\ln(a)$, donc $\ln\left(a^{k+1}\right) = k\ln(a) + \ln(a) = (k+1)\ln(a)$, ce qui prouve $\mathcal{P}(k+1)$ et établit l'hérédité.
5. (a) Soit $a > 0$. On a $0 = \ln(1) = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right)$ (où on a utilisé la question 3. dans la dernière égalité). Par conséquent, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0 - \ln(a) = -\ln(a)$.
   (b) Soit $a, b > 0$. On a $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right)$ (où on a utilisé la question 3. pour la dernière égalité). Or $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ d'après la question 5.(a), donc $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
6. (a) D'après la question 2., la fonction ln est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, elle admet donc une limite ℓ, qui peut être finie (ce qui arrive si ln est majorée) ou $+\infty$ (si ln n'est pas majorée).
   (b) Supposons par l'absurde que ℓ est finie. Comme $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$, on obtient par composition de limites que $\ln(2x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$. Mais d'après la question 4., pour tout $x > 0$, $\ln(2x) = \ln(2) + \ln(x)$. En passant à la limite dans cette égalité, on obtient $\ell = \ln(2) + \ell$, et donc $\ln(2) = 0$. C'est absurde car on a vu que $\ln(2) > 0$ lors de l'étude du signe de ln en question 2. Donc $\ell = +\infty$.
7. Soit $x > 0$. On a $\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ (où on a utilisé la question 5.(a) pour la dernière égalité). Or $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty$, donc en utilisant la question 6.(b) et une composition de limites, il vient $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty$. Par conséquent, $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to0^+]{} -\infty$.
8. (a) La fonction h est dérivable car ln et $x \mapsto x - 1$ le sont, et pour tout $x > 0$, $h'(x) = \frac{1}{x} - 1$. On a donc, pour $x > 0$: $h'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $\frac{1}{x} \geqslant 1$ si et seulement si $x \leqslant 1$. La fonction h est donc croissante sur $]0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$. Par conséquent, elle admet un maximum en 1, et $h(1) = \ln(1) - (1 - 1) = 0$. Donc pour tout $x > 0$, $h(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire $\ln(x) \leqslant x - 1$.

(b) Observons que $\ln(x) = \ln\left(\sqrt{x}^2\right) = 2\ln(\sqrt{x})$ (où on a utilisé 4. avec $k = 2$ dans la dernière égalité). Or on vient de montrer que pour tout $y > 0$, $\ln(y) \leqslant y - 1$. En appliquant cela à $y = \sqrt{x}$, il vient $\ln(\sqrt{x}) \leqslant \sqrt{x} - 1$ et donc $\ln(x) \leqslant 2\left(\sqrt{x} - 1\right)$.

Par conséquent, lorsque $x > 1$, on a $0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x} \leqslant 2\frac{\sqrt{x}-1}{x}$. Or $2\frac{\sqrt{x}-1}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc le théorème d'encadrement montre que $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

9. En écrivant $x = \dfrac{1}{\frac{1}{x}}$ et en utilisant $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ comme en question 7., il vient $x\ln(x) = -\dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. Or $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ et on a vu que $\frac{\ln(y)}{y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$ en 8.(b), donc par composition de limites, $\dfrac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$, donc $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

10. Soit $x > -1$ tel que $x \neq 0$. On remarque que $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x-0}$ est le taux d'accroissement de la fonction ln entre $1 + x$ et 1. Comme ln est dérivable en 1, ce taux d'accroissement converge vers $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$ quand x tend vers 0.

2 Exponentielle

11. La fonction ln est strictement croissante, donc elle est injective.

Pour la surjectivité, nous allons utiliser le théorème de valeurs intermédiaires. Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme $\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$, il existe $x_- > 0$ tel que $\ln\left(x_-\right) < y$. De même, puisque $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, il existe $x_+ > 0$ tel que $\ln\left(x_+\right) > y$. On a alors :

- $\ln(x_-) < y$;
- $\ln(x_+) > y$;
- ln est continue sur $\left[x_-, x_+\right]$ (car elle y est dérivable) ;

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in \left[x_-, x_+\right]$ tel que $f(x) = y$. On a donc, pour chaque $y \in \mathbb{R}$, trouvé un antécédent à y, donc ln est surjective.

12. La fonction ln est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et sa dérivée ne s'y annule pas (car pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} \neq 0$). Par conséquent, la bijection réciproque de ln (c'est-à-dire exp) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \frac{1}{\ln'\left(\ln^{-1}(x)\right)} = \dfrac{1}{\frac{1}{\exp(x)}} = \exp(x)$.

13. Rappelons que exp prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ (c'est l'ensemble de départ de ln). Donc $\exp' = \exp$ est à valeurs strictement positives, donc exp est strictement croissante.

14. On a $\ln(1) = 0$, donc $\exp(\ln(1)) = \exp(0)$, c'est-à-dire $\exp(0) = 1$.

15. On a $\ln(2) \leqslant 1$ d'après 8.(a) donc, par croissance de exp, $\exp(\ln(2)) \leqslant \exp(1)$, c'est-à-dire $2 \leqslant \exp(1)$.

16. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a $\ln(\exp(x + y)) = x + y = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = \ln(\exp(x)\exp(y))$ (où on a utilisé la question 3. dans la dernière égalité), c'est-à-dire en prenant les deux membres extrémaux de l'égalité : $\ln(\exp(x + y)) = \ln(\exp(x)\exp(y))$. Comme ln est injective, on en déduit que $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

17. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x)\exp(-x)$ (où on a utilisé 14. pour la première égalité et 16. pour la dernière). Par conséquent, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

18. Revenons à la définition de « tendre vers $+\infty$ ». $\exp(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ se quantifie en : $\forall A > 0, \quad \exists x_0 \in \mathbb{R}, \quad \forall x \geqslant x_0, \quad \exp(x) \geqslant A$. Soit $A > 0$, montrons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant x_0$, $\exp(x) \geqslant A$. Posons $x_0 = \ln(A)$. Alors pour tout $x \geqslant x_0$, la croissance de l'exponentielle entraîne que $\exp(x) \geqslant \exp(x_0) = \exp(\ln(A)) = A$. On a donc montré, en revenant à la définition, que $\exp(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Notons ensuite que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = \exp(-(-x)) = \frac{1}{\exp(-x)}$. Or $-x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et $\exp(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$, donc par composition, $\exp(-x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et par inverse, on conclut que $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.

19. Puisque $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\exp(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$, la composition des limites conduit à $\frac{\ln(\exp(y))}{\exp(y)} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$, c'est-à-dire $\frac{y}{\exp(y)} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$.

20. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. On observe que $\frac{\exp(x)-1}{x} = \frac{\exp(x)-\exp(0)}{x-0}$ est le taux d'accroissement de exp entre x et 0. Comme exp est dérivable en 0, ce taux d'accroissement converge vers $\exp'(0) = \exp(0) = 1$ quand x tend vers 0.