Devoir maison : logarithme, exponentielle.

Ce devoir est facultatif.

Le but de ce devoir est de définir correctement les fonctions ln et exp et démontrer leurs propriétés usuelles. On fera donc comme si on ne les connaissait pas (par exemple, on ne pourra dire que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ pour tous $a, b > 0$ qu'après l'avoir prouvé (c'est la question 3.)). En revanche, on pourra utiliser les résultats du cours où ln et exp n'apparaissent pas (par exemple le lien entre monotonie et signe de la dérivée, dérivée d'une fonction composée...).

Résultats admis ou rappelés.

On admet que toute fonction f continue sur un intervalle admet une primitive, c'est-à-dire qu'il existe une fonction F dérivable telle que $F' = f$.

1 Logarithme

1. À l'aide du résultat admis, montrer qu'il **existe** une **unique** fonction $F : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = \frac{1}{x}$ et $F(1) = 0$.

Cette fonction est le logarithme népérien, noté ln dans la suite. À ce stade, on sait seulement que $\ln(1) = 0$, que ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

2. Montrer que ln est strictement croissante. En déduire le signe de $\ln(x)$ en fonction de x.
3. Soit $a, b > 0$. On va montrer que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
   (a) Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(ax) \end{array}$. Montrer que g est dérivable et calculer sa dérivée.
   (b) En déduire que $g - \ln$ est constante.
   (c) Conclure.
4. Prouver que pour tout $a > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(a^k\right) = k\ln(a)$. On procédera par récurrence sur k.
5. (a) Montrer que pour tout $a > 0$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$. *Indication : $1 = a \times \frac{1}{a}$ et $\ln(1) = 0$.*
   (b) En déduire que pour tous $a, b > 0$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
6. (a) Montrer que ln a une limite ℓ en $+\infty$, avec ℓ finie ou $\ell = +\infty$.
   (b) En considérant la limite de $\ln(2x)$ quand x tend vers $+\infty$, montrer que ℓ ne peut pas être finie. On a donc $\ln(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.
7. En déduire que $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$. *Indication : pour tout $x > 0$, $x = \dfrac{1}{\frac{1}{x}}$, donc $\ln(x) = \ldots$*
8. (a) Soit $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) - (x-1) \end{array}$. Étudier les variations de h, et en déduire que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leqslant x - 1$. En particulier, $\ln(2) \leqslant 2 - 1 = 1$.
   (b) Soit $x > 0$. En remarquant que $\ln(x) = \ln\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right)$, montrer que $\ln(x) \leqslant 2\left(\sqrt{x} - 1\right)$. En déduire que $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.
9. Soit $x > 0$. Montrer que $x\ln(x) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$, et en déduire que $x\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$.
10. En utilisant un taux d'accroissement, montrer que $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.

2 Exponentielle

11. Montrer que la fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est une bijection.

On appelle fonction exponentielle sa bijection réciproque, et on la note exp. Cela signifie que exp est l'unique fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(f(x)) = x$ et pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $f(\ln(y)) = y$.
On note souvent e^x au lieu de $\exp(x)$.

12. Montrer que exp est dérivable et que $\exp' = \exp$.
13. En déduire que exp est strictement croissante.
14. Montrer que $\exp(0) = 1$. *On rappelle que* $\ln(1) = 0$.
15. Montrer que $\exp(1) \geqslant 2$ *On rappelle qu'on a déjà prouvé que* $\ln(2) \leqslant 1$.

Le nombre $\exp(1)$ est noté e. Il est parfois appelé nombre d'Euler ou constante de Néper. On vient de montrer que $e \geqslant 2$. En réalité, e est **à peu près** égal à $2,71828$. Cependant e n'est pas un nombre décimal (autrement dit il n'a pas d'écriture décimale avec un nombre fini de chiffres). Pire, il n'est même pas rationnel.

16. À l'aide de la question 3., montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.
17. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
18. Montrer que $\exp(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. En déduire que $\exp(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$.
19. À l'aide de la limite $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ prouvée en 8.(b), montrer que $\frac{y}{\exp(y)} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$.
20. En utilisant un taux d'accroissement, montrer que $\frac{\exp(x)-1}{x} \xrightarrow[x\to+0]{} 1$.