Devoir maison : quelques résultats autour des points fixes. Correction.

Solution 1. — 1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = y$.

2. Posons $g : \begin{array}{rcl} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array}$. Alors g est continue en tant que différence de deux fonctions continues (f et $x \mapsto x$). De plus, puisque $f([a,b]) \subset [a,b]$, on a $f(a) \geqslant a$ et donc $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et de même, $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) - c = 0$, autrement dit $f(c) = c$, donc f a au moins un point fixe.

3. (a) Puisque f est décroissante, pour tout $x \leqslant 0$, on a $f(x) \geqslant f(0)$. Par conséquent, pour tout $x \leqslant 0$, $f(x) - x \geqslant f(0) - x$. Or $f(0) - x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, donc $f(x) - x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$.

   De même, la décroissance de f entraîne que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) - x \leqslant f(0) - x$, et comme $f(0) - x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, on obtient $f(x) - x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.

   (b) Attention, il y a deux choses à montrer : l'existence d'un point fixe et son unicité.

   Existence : Posons $g : \begin{array}{rcl} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array}$. On a vu à la question précédente que $g(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(a) \geqslant 0$. En outre, puisqu'on a aussi vu que $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, il existe $b > a$ tel que $g(b) \leqslant 0$. De plus, la fonction g est continue car c'est la différence de deux fonctions continues (f et $x \mapsto x$). Par conséquent, le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g entre a et b montre qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$. On a ainsi montré que f a (au moins) un point fixe.

   Unicité : Pour montrer l'unicité d'un objet, on raisonne souvent par l'absurde.

   Supposons donc que f possède (au moins) deux points fixes différents c_1 et c_2, avec par exemple $c_1 < c_2$ (le cas où $c_1 > c_2$ est similaire). Alors $f(c_1) = c_1$ et $f(c_2) = c_2$ donc $f(c_1) = c_1 < c_2 = f(c_2)$. Mais comme f est décroissante et $c_1 < c_2$, on a $f(c_1) \geqslant f(c_2)$. On a montré qu'on a à la fois $f(c_1) < f(c_2)$ et $f(c_1) \geqslant f(c_2)$. C'est absurde ! Par conséquent, f ne peut pas avoir deux points fixes, d'où l'unicité.

   (c) Donnons deux contre-exemples, l'un où on perd l'existence du point fixe et l'autre où on perd l'unicité.

   La fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$, est continue, croissante et n'a pas de point fixe (car si elle possède un point fixe c, alors $c = c + 1$, ce qui est impossible).

   La fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$, est continue, croissante et a une infinité de points fixes (tout $c \in \mathbb{R}$ est un point fixe de f).

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, montrons que f est continue en x. On a, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant |f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|$. Or $k|y - x| \xrightarrow[y\to x]{} 0$, donc par encadrement, $|f(y) - f(x)| \xrightarrow[y\to x]{} 0$, donc $f(y) \xrightarrow[y\to x]{} f(x)$. Ainsi, f est continue en x, et comme ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Soit $x \geqslant 0$. On a

$$\begin{aligned} f(x) - x &= f(x) - f(0) + f(0) - x \\ &\leqslant |f(x) - f(0)| + f(0) - x \\ &\leqslant k|x - 0| + f(0) - x \\ &= kx + f(0) - x && \text{(quand } x \geqslant 0\text{, on a } |x-0| = x) \\ &= (k-1)x + f(0) \end{aligned}$$

   Or $k - 1 < 0$ car $k < 1$, donc $(k-1)x + f(0) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$. Par conséquent, $f(x) - x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.

De même, pour tout $x \leqslant 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x) - x &= f(x) - f(0) + f(0) - x \\ &\geqslant f(0) - x - |f(x) - f(0)| \\ &\geqslant f(0) - x - k|x - 0| && \text{(quand } x \leqslant 0\text{, on a } |x-0| = -x\text{)} \\ &= f(0) - x + kx \\ &= f(0) + (k-1)x. \end{aligned}$$

Or $k - 1 < 0$, donc $f(0) + (k-1)x \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$. Par conséquent, $f(x) - x \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$.

(c) La preuve de l'existence d'un point fixe est exactement la même qu'en 3.(b) : on utilise les limites de $f(x) - x$ en $\pm\infty$ pour trouver $a < b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) - a \geqslant 0$ et $f(b) - b \leqslant 0$ puis la continuité pour pouvoir appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $x \mapsto f(x) - x$ sur $[a, b]$.
Unicité : Supposons par l'absurde que f possède deux points fixes différents, c_1 et c_2. Alors le caractère k-lipschitzien de f entraîne que $|f(c_1) - f(c_2)| \leqslant k|c_1 - c_2|$. Mais $f(c_1) = c_1$ et $f(c_2) = c_2$, donc

$$|c_1 - c_2| \leqslant k|c_1 - c_2|.$$

Or $|c_1 - c_2| > 0$ car $c_1 \neq c_2$. En divisant l'inégalité précédente par $|c_1 - c_2|$, il vient donc

$$1 \leqslant k,$$

ce qui est absurde puisqu'on a supposé que $k \in [0, 1[$. Par conséquent, f ne peut pas avoir deux points fixes, d'où l'unicité.

(d) Les deux contre-exemples proposés en 3.(c) fonctionnent toujours : ce sont deux fonctions 1-lipschitziennes qui ne possèdent aucun point fixe pour la première et une infinité pour la seconde.

Solution 2. — 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **continue**. Alors l'image $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2. On demande de montrer une équivalence : il faut démontrer les implications dans les deux sens.
   — $\Longrightarrow$: Supposons que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(f(x)) = f(x)$, et montrons que $\mathrm{Fix}(f) = f([0, 1])$. Comme on doit montrer une égalité d'ensembles, on procède par double inclusion.
   - $\mathrm{Fix}(f) \subset f([0, 1])$: Soit $x \in \mathrm{Fix}(f)$. Alors $x = f(x)$, donc $x \in f([0, 1])$. *On remarque que l'hypothèse n'a pas été utilisée dans la preuve de cette inclusion : elle est tout le temps vraie.*
   - $f([0, 1]) \subset \mathrm{Fix}(f)$: Soit $y \in f([0, 1])$. Alors il existe $x \in [0, 1]$ tel que $y = f(x)$. Par hypothèse, on a $f(f(x)) = f(x)$, c'est-à-dire $f(y) = y$, donc $y \in \mathrm{Fix}(f)$.

   — $\Longleftarrow$: Supposons que $\mathrm{Fix}(f) = f([0, 1])$ et montrons que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(f(x)) = f(x)$. Soit $x \in [0, 1]$. Alors $f(x) \in f([0, 1])$, donc $f(x) \in \mathrm{Fix}(f)$. Par conséquent, $f(f(x)) = f(x)$.
3. Puisque f est continue et $[0, 1]$ est un intervalle, le théorème des valeurs intermédiaires (version intervalles) indique que $f([0, 1])$ est un intervalle. Or on vient de montrer que $f([0, 1]) = \mathrm{Fix}(f)$, donc $\mathrm{Fix}(f)$ est un intervalle.
4. Puisque $\mathrm{Fix}(f) = f([0, 1])$ est un sous-intervalle non vide de $[0, 1]$, il existe $a, b \in [0, 1]$ avec $a \leqslant b$ tels que $\mathrm{Fix}(f)$ est l'un des quatre intervalles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$. Pour montrer que $\mathrm{Fix}(f) = [a, b]$, il suffit donc de montrer que $a, b \in \mathrm{Fix}(f)$. Commençons par a. Pour tout $x \in \mathrm{Fix}(f)$, on a

$$f(x) = x$$

   (et il existe bien de tels x car $\mathrm{Fix}(f)$ n'est pas vide). En faisant tendre x vers a dans l'égalité précédente, le membre de gauche tend vers $f(a)$ (car f est continue en a) et le membre de droite tend vers a. Par unicité de la limite, on en déduit que $f(a) = a$, et donc $a \in \mathrm{Fix}(f)$. On montre de même que $b \in \mathrm{Fix}(f)$. Le seul intervalle possible parmi les quatre est donc $[a, b]$.
   Remarque : on peut aussi utiliser le théorème des bornes atteintes, qui donne directement le résultat, mais je ne sais pas si nous verrons ce théorème en classe.
5. Par définition de $\mathrm{Fix}(f)$, on a $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{Fix}(f)$. Or on vient de prouver que $\mathrm{Fix}(f) = [a, b]$, donc pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = x$.
   De plus, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in f([0, 1]) = \mathrm{Fix}(f) = [a, b]$ (où la première égalité découle de la question 2. et la deuxième de la question 4.).
6. Soit $x \in [0, 1]$. Alors $g(x) \in [a, b]$ par hypothèse. Or pour tout $y \in [a, b]$, $g(y) = y$. En appliquant cela à $y = g(x)$, il vient bien $g(g(x)) = g(x)$.
7. Géométriquement, les solutions continues de l'équation fonctionnelles sont de la forme suivante.

La portion de courbe en bleu est incluse dans la droite d'équation $y = x$ et la portion en rouge doit rester entre les deux droites en pointillés.

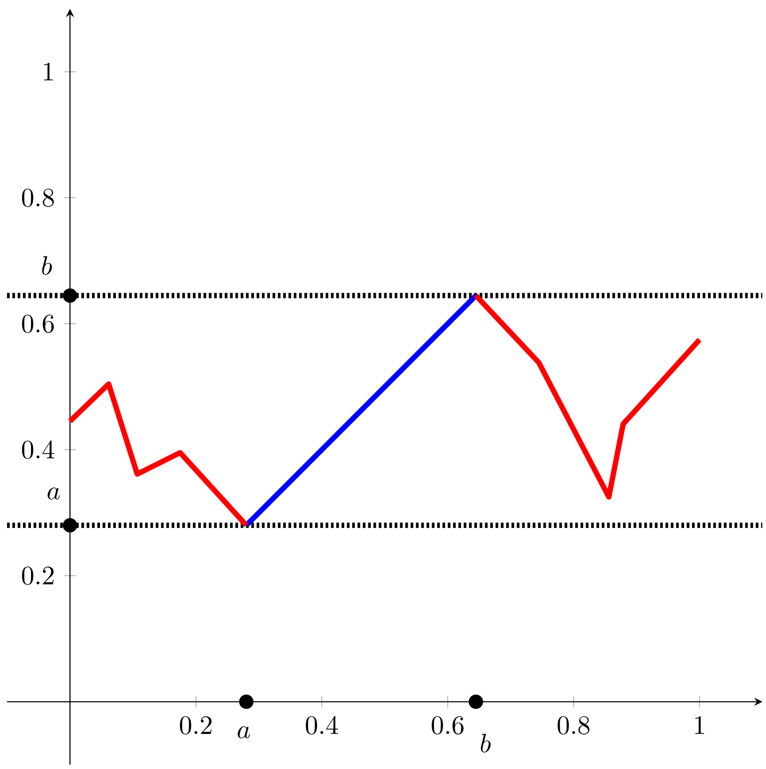

FIGURE 1 – Allure des solutions.