Université d'Angers
L1 DL MI – Analyse Élémentaire 2023-2024

Devoir maison : quelques résultats autour des points fixes.

Ce devoir est <u>facultatif</u>.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On dit qu'un élément $x \in I$ est un point fixe de f lorsque $f(x) = x$. Géométriquement, les points fixes de f sont les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec la droite d'équation $y = x$ (cette droite est souvent appelée « première bissectrice »).

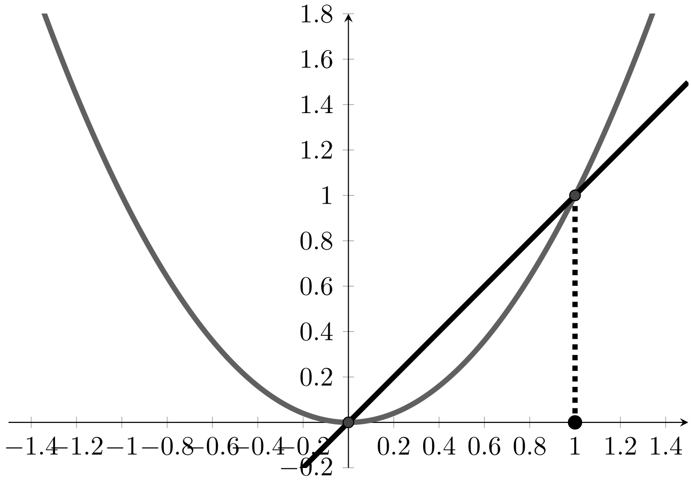

Figure 1 – La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ possède deux points fixes : 0 et 1.

Il existe de nombreux théorèmes donnant des conditions suffisantes pour qu'une fonction possède un point fixe. Ces théorèmes sont appelés « théorèmes de point fixe », vous pouvez en voir un aperçu sur `https://fr.wikipedia.org/wiki/Liste_de_théorèmes_du_point_fixe`.

Exercice 1. — *Trois théorèmes de point fixe.*
On propose de démontrer trois théorèmes simples de point fixe.

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On suppose que $I = [a, b]$, que f est continue et que $f([a, b]) \subset [a, b]$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction bien choisie, montrer que f a au moins un point fixe.
3. On suppose que $I = \mathbb{R}$ et que f est continue et décroissante.
   (a) Étudier les (éventuelles) limites de $f(x) - x$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Montrer que f possède un unique point fixe.
   (c) À l'aide d'un contre-exemple, montrer que le résultat précédent est faux si on suppose que f est croissante au lieu de décroissante.
4. On suppose que $I = \mathbb{R}$ et qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que f est k-lipschitzienne, c'est-à-dire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$.
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) - x \leqslant (k-1)x + f(0)$ et que pour tout $x \leqslant 0$, $f(x) - x \geqslant (k-1)x + f(0)$. En déduire les (éventuelles) limites de $f(x) - x$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

(c) Montrer que f possède un unique point fixe.

(d) Donner un contre-exemple au résultat précédent si on suppose seulement que f est 1-lipschitzienne.

Exercice 2. — *L'équation fonctionnelle $f \circ f = f$.*
Dans cet exercice, on propose de caractériser les fonctions $f : [0,1] \to [0,1]$ continues telles que pour tout $x \in [0,1]$, $f(f(x)) = f(x)$. On dit qu'on résout l'équation fonctionnelle $f \circ f = f$ (avec condition de continuité).

1. Énoncer la formulation du théorème des valeurs intermédiaires en termes d'intervalles.

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ continue. On pose $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in [0,1] \mid f(x) = x\}$ (c'est l'ensemble des points fixes de f).

2. Montrer que l'on a $f(f(x)) = f(x)$ pour tout $x \in [0,1]$ si et seulement si $\mathrm{Fix}(f) = f([0,1])$.

On suppose désormais que pour tout $x \in [0,1]$, $f(f(x)) = f(x)$.

3. En déduire que $\mathrm{Fix}(f)$ est un intervalle.
4. Montrer que $\mathrm{Fix}(f)$ est un intervalle de la forme $[a,b]$ où $a, b \in [0,1]$ avec $a \leqslant b$.
5. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) = x$ et que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [a,b]$.
6. Réciproquement, soit $g : [0,1] \to [0,1]$. On suppose qu'il existe $a, b \in [0,1]$ avec $a \leqslant b$ tels que pour tout $x \in [a,b]$, $g(x) = x$ et pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \in [a,b]$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $g(g(x)) = g(x)$.
7. Faire un dessin de l'allure des courbes des fonctions continues solutions de l'équation fonctionnelle.