Université d'Angers
L1 Mathématiques 2023-2024

Colles de géométrie.

Question de cours 1. —
Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites d'équations respectives $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ et $\alpha' x + \beta' y + \gamma' = 0$.
Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ soient parallèles.

Question de cours 2. —
Énoncer et démontrer le théorème de Pythagore généralisé (aussi appelé « Théorème d'Al-Kashi » ou encore « Loi des cosinus »).

Question de cours 3. —
Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $ax + by + c = 0$ et P_0 un point de coordonnées (x_0, y_0). Calculer la distance entre P_0 et $\mathcal{D}$.

Question de cours 4. —
Somme des angles d'un triangle (avec démonstration).

Exercice 1. —
Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. À quelle condition l'équation $\left(a^2 + 2a - 3\right) x + 3(a-1)y + 8 = 0$ est-elle l'équation d'une droite $\mathcal{D}_a$?

On suppose désormais que cette condition est satisfaite.

2. Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{D}_a$.
3. Déterminer une représentation paramétrique et une équation de la droite parallèle à $\mathcal{D}_a$ passant par le point $(0, 1)$.
4. Calculer la distance entre $\mathcal{D}_a$ et le point $(1, 3)$ pour $a = 2$.

Exercice 2. —
Soit $A = (0, 1)$. Pour $t > 0$, on pose $P_t = (t, \cos(t))$ et (x_t, y_t) les coordonnées de $\frac{\overrightarrow{AP_t}}{\left\|\overrightarrow{AP_t}\right\|}$.

1. Déterminer les (éventuelles) limites de x_t et y_t quand $t \to 0^+$. Faire le lien avec le cours d'analyse du premier semestre.
2. Même question quand $t \to +\infty$.

Exercice 3. — 1. Soit $\mathcal{C}$ un cercle. Qu'est-ce qu'une droite tangente à $\mathcal{C}$?

2. Déterminer (par une équation de droite ou une représentation paramétrique, comme vous le souhaitez) les droites tangentes au cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 qui passent par le point $(3, 4)$.

Exercice 4. — 1. Soit A, B, C, D quatre points du plan. Montrer que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}.$$

On pourra utiliser la relation de Chasles pour faire intervenir le point A dans tous les vecteurs où il n'apparaît pas.

2. Soit A, B, C un triangle non aplati. On note h_A la hauteur du triangle issue de A (c'est-à-dire l'unique droite orthogonale à (BC) passant par A), et de même h_B et h_C les hauteurs issues de B et C.
   (a) Montrer que h_A et h_B ont un unique point d'intersection, que l'on note H.
   (b) À l'aide de la première question, montrer que $H \in h_C$.

   On a montré que les hauteurs d'un triangle sont concourantes (autrement dit se coupent en un point, appelé orthocentre du triangle) avec une méthode différente de celle de l'exercice 11 de la feuille de TD.
3. Montrer que $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA}$.

Exercice 5. —
Soit u et v deux vecteurs. Montrer que $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$ et interpréter cette égalité sur un parallélogramme.

Exercice 6. — 1. Rappeler la formule de la distance entre le point $P_0 = (x_0, y_0)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$.
2. Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les droites d'équations respectives $3x + 4y - 15 = 0$ et $12x - 5y + 3 = 0$. Déterminer l'ensemble des points à égale distance des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
3. Même question en changeant l'équation de $\mathcal{D}_2$ par $3x + 4y = 0$.

Exercice 7. —
Soit A, B, C les points de coordonnées respectives $(-1, 2)$, $(2, -4)$ et $(-1, -4)$.
1. Que dire du triangle ABC ?
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 - MB^2 = 60$.
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + 2MB^2 = 45$.
4. Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + 2MB^2 = 20$.