Séminaire des doctorantes et doctorants du LAREMA
Marches aléatoires, une approche par les circuits électriques

Théo Ballu

4 décembre 2024

Résumé

Ce document est une version complétée d'un exposé donné au séminaire des doctorantes et doctorants du LAREMA.

Avertissement : il ne s'agissait pas d'un exposé de recherche, mais d'une introduction à une théorie pour des doctorants non-spécialistes en probabilités (on suppose connues les bases de la théorie des chaînes de Markov discrètes, mais rien de plus). Aucun des résultats présentés ici, ni aucune preuve, n'est une contribution originale.

On peut interpréter les marches aléatoires sur les graphes à l'aide de circuits électriques, où les probabilités de saut entre deux sommets sont vues comme des conductances. On présente ici les bases de cette analogie et comment elle permet de démontrer que la marche simple sur $\mathbb{Z}^d$ est récurrente pour $d \in \{1, 2\}$ et transiente pour $d \geq 3$. Les deux sources principales sont le chapitre 2 du livre [2] de Lyons et Peres et les notes de cours [1] de master de Curien. Ces deux références sont disponibles sur les sites des auteurs aux adresses `https://rdlyons.pages.iu.edu/prbtree/` et `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~nicolas.curien/enseignement.html`.

Table des matières

1 Marches aléatoires sur des graphes

Dans tout cet exposé, on considérera un graphe G que l'on supposera (pour simplifier) ***non-orienté***, ***simple***, ***connexe*** et ***localement fini***. On rappelle les définitions de ces termes, et plus généralement du vocabulaire utile sur les graphes.

Définition 1.1. — Un ***graphe simple non orienté*** G est une paire $G = (S, A)$ où S est un ensemble fini ou dénombrable, appelé ensemble des ***sommets*** et $A \subset \mathcal{P}_2(S)$ est appelé l'ensemble des ***arêtes*** (où $\mathcal{P}_2(S)$ désigne l'ensemble des parties à deux éléments de S). Lorsqu'on aura besoin d'orienter les arêtes, on notera $\vec{A}$ l'ensemble des arêtes orientées.

— Un ***voisin*** d'un sommet x est un sommet y tel que $\{x, y\}$ est une arête. On note $V(x)$ l'ensemble des voisins de x.

— Le ***degré*** d'un sommet est son nombre de voisins : $\deg(x) = |V(x)|$.

— Si tous les sommets ont un degré fini, on dit que le graphe est ***localement fini***.

— Un ***chemin*** reliant deux sommets x et y est une suite finie d'arêtes de la forme $(\{x,s_1\},\{s_1,s_2\},\dots,\{s_{n-1},s_n\},\{s_n,y\})$ (on autorise $n=0$, auquel cas on a seulement l'arête $\{x,y\}$). A priori, rien n'assure l'existence d'un tel chemin.

— La ***longueur*** d'un tel chemin est $n+1$.

— Un graphe est ***connexe*** si pour tous sommets $x \neq y$, il existe un chemin reliant x et y.

— La ***distance*** $d(x,y)$ entre deux sommets distincts est la longueur minimale des chemins reliant x à y (avec pour convention que $d(x,y)=+\infty$ s'il n'existe pas de chemin reliant x et y). Si G est connexe, alors d est une distance au sens des espaces métriques.

Pour construire une chaîne de Markov sur G, on a besoin de se donner des ***probabilités de transition*** $P=(P(x,y))_{x,y\in S}$, c'est-à-dire de donner la probabilité de sauter du sommet x au sommet y pour toute paire de sommets (x,y). On les construit à l'aide de ***conductances***, c'est-à-dire des poids positifs sur les arêtes, que l'on normalise pour en faire des probabilités.

Définition 1.2. — Une ***conductance*** sur G est une fonction $c : A \to \mathbb{R}_+^*$.

— La ***matrice de transition*** associée à la conductance c est $P = \left(\dfrac{c(\{x,y\})}{\sum_{y\in V(x)} c(\{x,y\})} \right)_{x,y\in S}$ où on convient que $c(\{x,y\})=0$ si $\{x,y\}\notin A$.

— La chaîne de Markov de transition P est appelée ***marche aléatoire*** sur le graphe G pour la conductance c. On note $\mathbb{P}_x$ la probabilité de la chaîne de Markov de transition P issue de x.

L'hypothèse de graphe localement fini assure que la somme au dénominateur est finie. La connexité du graphe et la stricte positivité des conductances assurent qu'elle est strictement positive, donc P est bien définie. Enfin, la connexité du graphe équivaut à l'irréductibilité de la marche sur G.

Notation 1.3. On fixe une conductance c, on note P la matrice de transition associée et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire sur G construite à partir de la matrice de transition P. On note $\mathbb{P}_x$ la probabilité d'un événement conditionnellement à $X_0=x$.

Exemple 1.4. L'exemple le plus simple consiste à prendre c constante. Dans ce cas, on a $P(x,y)=\frac{1}{\deg(x)}$: on choisit un sommet de façon équiprobable parmi les voisins. On appellera cette marche la ***marche simple*** sur le graphe G.

Dans le cas où $G=\mathbb{Z}^d$ avec des arêtes reliant les plus proches voisins pour la distance ℓ_1 [(a)], on parle de ***marche simple sur*** $\mathbb{Z}^d$. C'est cette marche qui nous servira de modèle jouet pour appliquer les résultats exposés à un cas concret.

Définition-proposition 1.5. Le ***poids*** d'un sommet $x\in S$ est

$$\pi(x)=\sum_{y\in V(x)} c(\{x,y\}).$$

Le poids π est une ***mesure réversible*** de la chaîne de Markov, c'est-à-dire que pour tous sommets x,y,

$$\pi(x)P(x,y)=\pi(y)P(y,x).$$

Démonstration. Par définition de P, ces deux quantités valent $c(\{x,y\})$. □

On peut donc réécrire la définition de P par $P(x,y)=\frac{c(\{x,y\})}{\pi(x)}$.

(a). Dans $\mathbb{Z}$, n est relié à $n-1$ et $n+1$. Dans $\mathbb{Z}^2$, (k,n) est relié à $(k-1,n)$, $(k+1,n)$, $(k,n-1)$ et $(k,n+1)$. Ainsi de suite pour les autres d.

Remarque. On a vu que les marches aléatoires sur les graphes simples, connexes et localement finis sont irréductibles et réversibles. En fait, on peut essentiellement représenter toutes les chaînes de Markov irréductibles et réversibles comme des marches aléatoires sur de tels graphes.

Supposons en effet qu'on dispose d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ irréductible et réversible, de matrice de transition P telle que $P(x,x)=0$ pour tout x. Notons π une mesure réversible, qui est strictement positive par irréductibilité. On associe à cette chaîne le graphe G dont les sommets sont les états de la chaîne et où deux sommets x,y sont reliés par une arête si $P(x,y)>0$. Alors en posant $c(x,y):=\pi(x)P(x,y)$, la réversibilité de π entraîne que $c(x,y)=c(y,x)$, qu'on peut donc noter sans ambiguïté $c(\{x,y\})$. La chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'identifie avec la chaîne de Markov sur le graphe G de conductance c. En résumé, les chaînes de Markov sur les graphes que l'on considère contiennent en fait **toutes** les chaînes de Markov irréductibles et réversibles n'autorisant pas les sauts d'un état vers lui-même. Cette dernière condition est en fait superflue, quitte à changer le temps pour n'observer que les "vrais" sauts.

On aura besoin de la notion de fonction ***harmonique*** en un sommet, qui signifie que la valeur d'une fonction en ce sommet est la moyenne (pondérée par les probabilités de la marche aléatoire) des valeurs prises sur les sommets voisins.

Définition 1.6. Une fonction $f:S\to\mathbb{R}$ est dite ***harmonique*** en un sommet $x\in S$ si

$$f(x)=\sum_{y\in V(x)}P(x,y)f(y).$$

Soit $A\subset S$. On dit que f est harmonique sur A si elle est harmonique en tout sommet $x\in A$.

2 Vocabulaire des circuits électriques et liens avec les marches aléatoires

Dans cette partie, on introduit le vocabulaire des circuits électriques. Cela permet d'interpréter physiquement les marches aléatoires sur les graphes. Outre l'intuition que cela apporte, on verra dans la partie 3 que les circuits électriques fournissent des preuves de résultats non évidents, comme des critères de récurrence et de transience permettant (par exemple) de traiter le cas de la marche simple sur $\mathbb{Z}^d$.

Que les allergiques à la physique se rassurent : il ne sera pas question ici de bobines, de condensateurs ou encore de diodes, mais uniquement de résistances.

Dans tout ce qui suit, la marche aléatoire considérée est une marche sur un graphe [(b)] muni d'une conductance c.

2.1 Vocabulaire des circuits électriques

Définition 2.1.

— La ***résistance*** est l'inverse de la conductance. On notera $r(\{x,y\}):=\frac{1}{c(\{x,y\})}$ la résistance de l'arête $\{x,y\}$.

— On fixe $B_{\text{in}}\neq B_{\text{out}}\in S$, qu'on peut imaginer comme les bornes d'une pile. Un ***potentiel*** (ou fonction de voltage) est une fonction $v:S\to\mathbb{R}$ harmonique sur $S\setminus\{B_{\text{in}},B_{\text{out}}\}$. La ***tension*** entre deux sommets x et y est la différence de potentiel $v(x)-v(y)$.

— Le ***courant*** circulant de x à y est

$$i(x,y):=c(\{x,y\})\big(v(x)-v(y)\big).$$

En réécrivant cette égalité sous la forme $v(x)-v(y)=r(\{x,y\})i(x,y)$, on retrouve la ***loi d'Ohm*** "$U=RI$".

Le courant est une notion orientée, contrairement à la conductance : $i(y,x)=-i(x,y)$.

Avec ces définitions, on retrouve les lois usuelles des circuits électriques.

(b). Toujours non orienté, simple, connexe et localement fini.

Proposition 2.2 (Loi des ***nœuds***)**.** *Soit $x \in S \setminus \{B_{\text{in}}, B_{\text{out}}\}$. On a*

$$\sum_{y \in V(x)} i(x,y) = 0.$$

Démonstration. L'harmonicité du potentiel v en x signifie que

$$v(x) = \sum_{y \in V(x)} P(x,y) f(y) = \sum_{y \in V(x)} \frac{c(\{x,y\})}{\sum_{y \in V(x)} c(\{x,y\})} v(y),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{y \in V(x)} c(\{x,y\}) v(x) = \sum_{y \in V(x)} c(\{x,y\}) v(y).$$

Par conséquent,

$$\sum_{y \in V(x)} i(x,y) = \sum_{y \in V(x)} \big(v(x) - v(y)\big) c(\{x,y\}) = 0.$$

□

Une fonction définie sur les arêtes orientées qui est antisymétrique et vérifie la loi des nœuds est appelée un ***flot*** (on y reviendra plus tard). On vient donc de démontrer que le courant est un flot.

Proposition 2.3 (Loi des ***mailles***)**.** *Soit $x_1 \leftrightarrow x_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow x_n \leftrightarrow x_{n+1} = x_1$ un cycle du graphe. Alors*

$$\sum_{k=1}^{n} \big(v(x_{k+1}) - v(x_k)\big) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{i(x_{k+1}, x_k)}{c(\{x_k, x_{k+1}\})} = 0.$$

Démonstration. Télescopage évident. □

On a défini les notions de courant et de potentiel ***localement***, sur chaque sommet ou arête du graphe. On souhaite désormais mesurer les propriétés ***globales*** du circuit. Gardant en tête l'interprétation de B_{in} et B_{out} comme les bornes de la pile du circuit, on définit le ***courant total*** du circuit comme la somme des courants sortant de la borne B_{in}. Cela donne lieu à la notion de ***résistance effective***, qui est la résistance qu'aurait le circuit si on le voyait comme une seule grosse résistance (en cours de physique, on appelle parfois cela la résistance équivalente).

Définition 2.4. Le ***courant total*** du circuit est

$$i_{\text{tot}} = \sum_{y \in V(B_{\text{in}})} i(x,y).$$

la ***résistance effective*** du circuit est

$$R_{\text{eff}} = \frac{v(B_{\text{in}}) - v(B_{\text{out}})}{i_{\text{tot}}}$$

et la ***conductance effective*** est

$$C_{\text{eff}} = \frac{1}{R_{\text{eff}}}.$$

Elle est bien définie si $v(B_{\text{in}}) \neq v(B_{\text{out}})$.

Remarque. Le courant étant défini à partir du potentiel et des conductances, la conductance effective dépend bien sûr des conductances, mais elle dépend ***a priori*** aussi du potentiel. On verra grâce à l'interprétation probabiliste de la Proposition 2.12 qu'il n'en est rien : seules les conductances importent.

Comme vous l'avez sûrement appris en cours de physique, on peut simplifier un circuit en remplaçant deux résistances en série ou en parallèle [c] par une résistance équivalente, en sommant les résistances dans le premier cas et en sommant les conductances dans le second cas. Ces opérations ne modifient pas la résistance effective du circuit (exercice). Une troisième transformation classique, appelée transformation étoile-triangle, vient s'ajouter à ces deux bien connues.

On définit enfin la notion de ***puissance*** à l'aide de la loi de Joule. En mathématiques, on l'appelle plutôt ***énergie***, même si cela ne correspond pas à la réalité physique.

Définition 2.5. L'***énergie d'une arête*** $\{x, y\}$ est

$$\mathscr{E}(\{x,y\}) = r(\{x,y\})i(x,y)^2 = \frac{i(x,y)^2}{c(\{x,y\})} = (v(x) - v(y))i(x,y).$$

L'***énergie totale*** du circuit associée au courant i est

$$\mathscr{E}(i) = \sum_{\{x,y\} \in A} \mathscr{E}(\{x,y\}) = \sum_{\{x,y\} \in A} \frac{i(x,y)^2}{c(\{x,y\})}.$$

La propriété d'antisymétrie assure que l'énergie est bien définie (l'orientation choisie pour l'arête $\{x, y\}$ lorsqu'on écrit $i(x, y)^2$ n'importe pas).

Plus généralement, on aura besoin de définir l'énergie d'un ***flot*** et son ***flot total***.

Définition 2.6. Un ***flot*** θ sur le graphe G est une fonction définie sur les arêtes ***orientées*** de G qui est antisymétrique et vérifie la loi des nœuds, c'est-à-dire :

$$\forall \{x,y\} \in A, \quad \theta(y,x) = -\theta(x,y) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in S \setminus \{B_{\text{in}}, B_{\text{out}}\}, \quad \sum_{y \in V(x)} \theta(x,y) = 0.$$

Le ***flot total*** de θ est

$$\theta_{\text{tot}} = \sum_{y \in V(B_{\text{in}})} \theta(B_{\text{in}}, y)$$

et son ***énergie totale*** est

$$\mathscr{E}(\theta) = \sum_{\{x,y\} \in A} \frac{\theta(x,y)^2}{c(\{x,y\})} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Remarque. On a choisi arbitrairement de définir le courant total et le flux total à partir de la borne B_{in}. Dans le cas où le graphe est fini, on aurait tout aussi bien pu choisir la borne B_{out} et obtenir le même résultat au signe près. En effet, en utilisant l'antisymétrie, on obtient

$$\sum_{\{x,y\} \in A} \big(\theta(x,y) + \theta(y,x)\big) = 0.$$

La finitude du graphe permet de voir cette somme comme une somme sur toutes les arêtes orientées [d], que l'on découpe en trois morceaux : les arêtes partant de B_{in}, celles partant de B_{out} et enfin celles partant de $S \setminus \{B_{\text{in}}, B_{\text{out}}\}$, c'est-à-dire

$$0 = \sum_{y \in V(B_{\text{in}})} \theta(B_{\text{in}}, y) + \sum_{y \in V(B_{\text{out}})} \theta(B_{\text{out}}, y) + \sum_{x \in S \setminus \{B_{\text{in}}, B_{\text{out}}\}} \sum_{y \in V(x)} \theta(x,y).$$

Grâce à la loi des nœuds, la troisième somme est nulle, d'où

$$\sum_{y \in V(B_{\text{in}})} \theta(B_{\text{in}}, y) = - \sum_{y \in V(B_{\text{out}})} \theta(B_{\text{out}}, y).$$

(c). Techniquement, puisqu'on a supposé que le graphe G est simple, il ne devrait pas y avoir de résistances en parallèle. Mais en simplifiant deux résistances en série, on peut faire apparaître des arêtes multiples dans le graphe...

(d). Sans hypothèse de finitude du graphe, rien n'assure que cette somme sur les arêtes orientées est bien définie : penser à $0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \big((-1)^{2n} + (-1)^{2n+1}\big)$ que l'on ne peut pas écrire $0 = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k$.

L'énergie associée au courant i vérifie un principe de ***conservation***, qui indique que l'énergie fournie aux bornes est égale à l'énergie dissipée dans le circuit. On a en fait une formulation générale pour les flots, mais attention, elle ne s'interprète en termes d'énergie que dans le cas où le flot est le courant.

Proposition 2.7 (Conservation de l'énergie)**.** *On suppose G fini. Soit θ un flot sur G et $f : S \to \mathbb{R}$. Alors*

$$\sum_{\{x,y\}\in A} (f(x) - f(y))\, \theta(x, y) = (f(B_{\text{in}}) - f(B_{\text{out}}))\theta_{\text{tot}}.$$

En prenant pour fonction f le potentiel v et pour θ le courant i, on aboutit au principe de conservation de l'énergie mentionné ci-dessus, qui peut aussi s'écrire avec la résistance effective sous la forme suivante :

$$\mathscr{E}(i) = R_{\text{eff}} i_{\text{tot}}^2. \tag{1}$$

Démonstration. On pose $\theta(x, y) = 0$ si $\{x, y\}$ n'est pas une arête. On a alors :

$$\begin{aligned}
2 \sum_{\{x,y\}\in A} (f(x) - f(y))\, \theta(x, y) &= \sum_{(x,y)\in S^2} (f(x) - f(y))\, \theta(x, y) \\
&= \sum_{x\in S} f(x) \sum_{y\in S} \theta(x, y) - \sum_{y\in S} f(y) \sum_{x\in S} \theta(x, y) \\
&= \sum_{x\in S} f(x) \sum_{y\in S} \theta(x, y) + \sum_{y\in S} f(y) \sum_{x\in S} \theta(y, x) \\
&= 2 \sum_{x\in S} f(x) \sum_{y\in S} \theta(x, y) \\
&= 2f(B_{\text{in}}) \underbrace{\sum_{y\in S} \theta(B_{\text{in}}, y)}_{\theta_{\text{tot}}} + 2f(B_{\text{out}}) \underbrace{\sum_{y\in S} \theta(B_{\text{out}}, y)}_{-\theta_{\text{tot}} \text{ (remarque précédente)}} + 2 \sum_{x\in S\setminus\{B_{\text{in}},B_{\text{out}}\}} f(x) \underbrace{\sum_{y\in V(x)} \theta(x, y)}_{0 \text{ (nœuds)}} \\
&= 2(f(B_{\text{in}}) - f(B_{\text{out}}))\theta_{\text{tot}}.
\end{aligned}$$

□

Le courant est un flot bien particulier, qui est caractérisé par un principe physique universel, qualifié de principe ***variationnel*** : la minimisation de l'énergie.

Proposition 2.8 (Principe de ***Thomson***)**.** *On suppose G fini. Soit θ un flot sur G de même flot total que le courant i. Alors $\mathscr{E}(\theta) \geq \mathscr{E}(i)$ avec égalité si et seulement si $\theta = i$.*

Démonstration. On introduit l'espace $\ell_2(c)$ des fonctions f définies sur les arêtes ***orientées*** de G, muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle_c = \frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in\vec{A}} \frac{f(x,y)g(x,y)}{c(\{x,y\})}$ (le facteur $\frac{1}{2}$ vient pour compenser l'orientation des arêtes, qui sont comptées en double, une fois dans chaque sens). On observe que $\mathscr{E}(\theta) = \|\theta\|_c^2$. Nous allons montrer que i et $\theta - i$ sont orthogonaux. Le théorème de Pythagore indiquera alors que $\|\theta\|_c^2 = \|i\|_c^2 + \|\theta - i\|_c^2$, autrement dit que

$$\mathscr{E}(\theta) = \mathscr{E}(i) + \|\theta - i\|_c^2,$$

ce qui entraîne immédiatement le résultat.

Pour montrer l'orthogonalité, on écrit

$$\begin{aligned}
\langle i, \theta - i\rangle_c &= \frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in\vec{A}} \frac{i(x, y)}{c(\{x, y\})} (\theta(x, y) - i(x, y)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{(x,y)\in\vec{A}} (v(x) - v(y))\, (\theta(x, y) - i(x, y))\, .
\end{aligned}$$

D'après la Proposition 2.7 de conservation de l'énergie appliquée au flot $\theta - i$, on a donc

$$\langle i, \theta - i\rangle_c = (v(B_{\text{in}}) - v(B_{\text{out}}))(\theta - i)_{\text{tot}}.$$

Mais θ et i ayant le même flot total, $(\theta - i)_{\text{tot}} = 0$, ce qui conclut. □

2.2 Interprétation probabiliste

2.2.1 Potentiel

On commence par un résultat fondamental sur l'harmonicité, qui nous permet d'interpréter le potentiel de façon probabiliste.

Théorème 2.9 (Problème de Dirichlet)**.** *Soit $A \subset S$ fini et $f_0 : S \setminus A \to \mathbb{R}$. Il existe une unique fonction f qui coïncide avec f_0 sur $S \setminus A$ et qui est harmonique en tout point de A. Cette fonction est donnée par*

$$f(x) = \mathbb{E}_x \left[f_0 \left(X_{\tau_{A^c}} \right) \right]$$

où $\tau_{A^c} = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \notin A\}$ est le temps de sortie de A. On dit que f résout le problème de Dirichlet avec condition au bord f_0.

Éléments de preuve. Le résultat n'étant pas propre aux circuits électriques, on passe rapidement.

Pour vérifier que la fonction f proposée convient, on décompose $f(x) = \mathbb{E}_x \left[f_0 \left(X_{\tau_{A^c}} \right) \right]$ selon la valeur de X_1.

Pour l'unicité, on utilise un principe du maximum (semblable à celui que vous connaissez peut-être dans le cas des fonctions harmoniques au sens du laplacien $\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$). □

Corollaire 2.10 (Interprétation probabiliste du potentiel)**.** *On suppose G fini et on note $\tau_{\text{in}} = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = B_{\text{in}}\}$ et $\tau_{\text{out}} = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = B_{\text{out}}\}$* [(e)]*. Il existe un unique potentiel v tel que $v(B_{\text{in}}) = 1$ et $v(B_{\text{out}}) = 0$, et il est donné par $v(x) = \mathbb{P}_x \left(\tau_{\text{in}} < \tau_{\text{out}} \right)$.*

Démonstration. Il s'agit de résoudre le problème de Dirichlet précédent avec $A = S \setminus \{B_{\text{in}}, B_{\text{out}}\}$ et la condition au bord $f_0 = \mathbb{1}_{\{B_{\text{in}}\}}$. L'unique solution est donc donnée par

$$v(x) = \mathbb{E}_x \left[\mathbb{1}_{X_{\tau_{A^c}} = B_{\text{in}}} \right] = \mathbb{P}_x \left(X_{\tau_{A^c}} = B_{\text{in}} \right).$$

Sortir de A signifie atteindre B_{in} ou B_{out}, donc être en B_{in} à la sortie de A signifie qu'on a atteint B_{in} avant B_{out}, d'où $v(x) = \mathbb{P}_x \left(\tau_{\text{in}} < \tau_{\text{out}} \right)$. □

Remarque. Partons d'un potentiel v quelconque. Supposons dans un premier temps que $v(B_{\text{in}}) = v(B_{\text{out}})$. Alors la fonction constante égale à $v(B_{\text{in}})$ est un potentiel (l'harmonicité est évidente) vérifiant les mêmes conditions au bord que v. Par unicité dans le Théorème 2.9, v est constante.

Supposons maintenant au contraire que $v(B_{\text{in}}) \neq v(B_{\text{out}})$. On observe que l'harmonicité est préservée par addition d'une constante et par multiplication par une constante. Ainsi, la fonction $\tilde{v} = \frac{v - v(B_{\text{out}})}{v(B_{\text{in}}) - v(B_{\text{out}})}$ est un potentiel vérifiant $\tilde{v}(B_{\text{in}}) = 1$ et $\tilde{v}(B_{\text{out}}) = 0$. C'est donc le potentiel du corollaire précédent.

Notation 2.11. À partir de maintenant, on considérera toujours un potentiel non constant v (ce qui revient à dire que $v(B_{\text{in}}) \neq v(B_{\text{out}})$) et on note v_{p} le potentiel du Corollaire 2.10.

2.2.2 Résistance effective

Lançant la marche aléatoire depuis B_{in}, on cherche à savoir quelle est la probabilité de passer par B_{out} avant de revenir à B_{in}. Autrement dit, en notant $\tau_{\text{out}} = \inf\{n \geq \mathbf{0} \mid X_n = B_{\text{out}}\}$ comme précédemment et $\tau_{\text{in}}^+ := \inf\{n \geq \mathbf{1} \mid X_n = B_{\text{in}}\}$, on veut calculer

$$\mathbb{P}_{B_{\text{in}}} \left(\tau_{\text{out}} < \tau_{\text{in}}^+ \right).$$

Proposition 2.12. *On suppose G fini. On a*

$$\mathbb{P}_{B_{\text{in}}} \left(\tau_{\text{out}} < \tau_{\text{in}}^+ \right) = \frac{C_{\text{eff}}}{\pi(B_{\text{in}})}.$$

Ce résultat étant valable quel que soit le potentiel v non constant, on en déduit comme annoncé en Définition 2.4 que la conductance effective ne dépend pas du potentiel.

(e). La finitude de G assure que ces temps sont presque sûrement finis.

Démonstration. On écrit (en utilisant la propriété de Markov) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{B_{\mathrm{in}}}\left(\tau_{\mathrm{out}}<\tau_{\mathrm{in}}^{+}\right) &= \sum_{y\in V(B_{\mathrm{in}})} \mathbb{P}_{B_{\mathrm{in}}}\left(\left(\tau_{\mathrm{out}}<\tau_{\mathrm{in}}^{+}\right)\cap(X_1=y)\right)\\ &= \sum_{y\in V(B_{\mathrm{in}})} P(B_{\mathrm{in}},y)\mathbb{P}_y\left(\tau_{\mathrm{out}}<\tau_{\mathrm{in}}\right)\\ &= \sum_{y\in V(B_{\mathrm{in}})} P(B_{\mathrm{in}},y)\left(1-\mathbb{P}_y\left(\tau_{\mathrm{in}}<\tau_{\mathrm{out}}\right)\right).\end{aligned}$$

En utilisant la définition de la matrice de transition et le Corollaire 2.10 ainsi que la remarque qui le suit pour exprimer $\mathbb{P}_y\left(\tau_{\mathrm{in}}<\tau_{\mathrm{out}}\right)$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{B_{\mathrm{in}}}\left(\tau_{\mathrm{out}}<\tau_{\mathrm{in}}^{+}\right) &= \sum_{y\in V(B_{\mathrm{in}})} \frac{c(\{B_{\mathrm{in}},y\})}{\pi(B_{\mathrm{in}})}\left(1-\frac{v(y)-v(B_{\mathrm{out}})}{v(B_{\mathrm{in}})-v(B_{\mathrm{out}})}\right)\\ &= \frac{1}{\pi(B_{\mathrm{in}})}\frac{\sum_{y\in V(B_{\mathrm{in}})} c(\{B_{\mathrm{in}},y\})\left(v(B_{\mathrm{in}})-v(y)\right)}{v(B_{\mathrm{in}})-v(B_{\mathrm{out}})}\\ &= \frac{1}{\pi(B_{\mathrm{in}})}\frac{\sum_{y\in V(B_{\mathrm{in}})} i(B_{\mathrm{in}},y)}{v(B_{\mathrm{in}})-v(B_{\mathrm{out}})}\\ &= \frac{1}{\pi(B_{\mathrm{in}})}\frac{i_{\mathrm{tot}}}{v(B_{\mathrm{in}})-v(B_{\mathrm{out}})}\\ &= \frac{1}{\pi(B_{\mathrm{in}})}C_{\mathrm{eff}}.\end{aligned}$$

□

3 Récurrence et transience, cas de la marche simple sur $\mathbb{Z}^d$

On donne un critère de récurrence s'exprimant à l'aide des conductances effectives. L'interprétation probabiliste qui en a été faite en Proposition 2.12 est valable dans le cas où le graphe G est fini, auquel cas il est facile de voir que la marche est récurrente [(f)]. En outre, la notion de conductance effective est mal définie pour un graphe infini : la Définition 2.4 nécessite un potentiel, dont rien ne nous assure *a priori* l'existence dans le cas infini (le Théorème 2.9 ne s'applique pas). Pour obtenir un critère intéressant, on doit donc étendre la notion de conductance effective et son interprétation probabiliste dans le cas où G est un graphe dénombrable. Pour cela, on va utiliser une ***exhaustion*** de G par des sous-graphes finis.

Définition 3.1. Soit $G=(S,A)$ un graphe dénombrable. Une ***exhaustion*** de G est une suite ***croissante*** $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}=(S_n,A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-graphes ***finis*** de G telle que $B_{\mathrm{in}}\in S_n$ pour tout n, $S=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}S_n$ et A_n est obtenu par restriction de A aux sommets de S_n.

Il existe toujours une exhaustion de G : il suffit d'écrire les sommets sous la forme $S=\{s_k \mid k\in\mathbb{N}\}$ et de prendre $S_n=\{s_k \mid k\le n\}$ (et A_n toutes les arêtes de A reliant deux sommets de S_n).

Pour la suite, fixons un graphe dénombrable $G=(S,A)$ muni d'une conductance c et une exhaustion $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}=(S_n,A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de G.

À partir du graphe $G_n=(S_n,A_n)$, on construit le graphe G_n^∞ et la conductance c_n comme suit :

— on définit c_n sur A_n par restriction de c ;

— on ajoute un sommet à S_n, noté ∞ ;

— pour chaque arête de A reliant un sommet $x\in S_n$ à un sommet $y\in S\setminus S_n$, on ajoute une arête de x à ∞ de conductance $c_n(\{x,\infty\})=c(\{x,y\})$. Si l'opération a créé plusieurs arêtes de x à ∞, on les fusionne et on somme les conductances (règle de simplification des résistances en parallèle).

(f). Par exemple parce que la mesure réversible π est automatiquement finie, ce qui assure la récurrence par un résultat classique sur les chaînes de Markov.

Théorème 3.2. *La conductance effective $C_{\text{eff}}(G_n^\infty)$ du graphe G_n^∞, muni des bornes B_{in} et ∞, est décroissante (donc convergente)* [(g)]*, et la marche aléatoire sur G est transiente si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty} C_{\text{eff}}(G_n^\infty) > 0.$$

On appelle conductance effective de G cette limite.

Démonstration. Lancer une marche aléatoire sur G tuée lorsqu'elle sort de S_n revient à lancer une marche aléatoire sur G_n^∞ tuée lorsqu'elle atteint ∞. Ainsi, en notant $\tau_n^\infty = \inf\{k \in \mathbb{N} \mid X_k \in S \setminus S_n\}$ le temps de sortie de S_n, on a

$$\mathbb{P}_{B_{\text{in}}}\left(\tau_n^\infty < \tau_{\text{in}}^+\right) = \frac{C_{\text{eff}}\left(G_n^\infty\right)}{\pi(B_{\text{in}})}$$

d'après la Proposition 2.12. En outre, la croissance de l'exhaustion entraîne que les événements $\left(\tau_n^\infty < \tau_{\text{in}}^+\right)$ sont décroissants (si on sort de S_{n+1} avant de repasser par B_{in}, alors on est aussi sorti de S_n avant de repasser par B_{in}), d'où la décroissance de la conductance effective.

En outre, par continuité décroissante de la probabilité, on a

$$\lim_{n\to+\infty} C_{\text{eff}}\left(G_n^\infty\right) = \pi(B_{\text{in}})\mathbb{P}_{B_{\text{in}}}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\tau_n^\infty < \tau_{\text{in}}^+\right)\right),$$

si bien que $\lim_{n\to+\infty} C_{\text{eff}}(G_n^\infty) > 0$ si et seulement si $\mathbb{P}_{B_{\text{in}}}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\tau_n^\infty < \tau_{\text{in}}^+\right)\right) > 0$. Mais l'événement $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\tau_n^\infty < \tau_{\text{in}}^+\right)$, qui signifie que la marche sort de tous les S_n avant de repasser par B_{in}, est exactement l'événement "$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne repasse jamais par B_{in}" [(h)], donc la transience de la marche signifie par définition que la probabilité de cet événement est non nulle. □

Corollaire 3.3. *La marche simple sur $\mathbb{Z}$ est récurrente.*

Démonstration. On prend $B_{\text{in}} = 0$ et l'exhaustion $(G_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\llbracket -n, n\rrbracket)_{n\in\mathbb{N}}$.

Utilisant la règle de simplification des résistances en série, la conductance effective de G_n^∞ est celle du graphe à deux états, B_{in} et ∞, reliés par deux arêtes de conductance $\frac{1}{n+1}$. Utilisant alors la règle de simplification des résistances en parallèle, on fusionne ces deux arêtes en une seule, de conductance $\frac{2}{n+1}$, si bien que la conductance effective de G_n^∞ est $\frac{2}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On conclut à l'aide du Théorème 3.2. □

Il est bien connu que la marche simple sur $\mathbb{Z}^d$ est récurrente pour $d \in \{1, 2\}$ et transiente pour $d \geq 3$. Il reste donc à traiter le cas de $d \geq 2$. Heureusement, le théorème suivant nous permet de réduire le cas de n'importe quel $d \geq 3$ au cas $d = 3$.

On rappelle l'égalité (1) qui sera utile pour la suite : pour un graphe fini,

$$\mathscr{E}(i) = R_{\text{eff}} i_{\text{tot}}^2.$$

En particulier, si le courant total est unitaire, on a

$$\mathscr{E}(i) = R_{\text{eff}}. \tag{2}$$

Théorème 3.4 (Principe de monotonie de Rayleigh)**.** *Soit $c \leq c'$ deux conductances sur G telles que $c \leq c'$. On autorise exceptionnellement c à prendre la valeur 0 tant que le sous-graphe induit par la marche aléatoire de conductance c reste connexe. La conductance effective de G pour c est inférieure à celle pour c'.*

En particulier, si la marche pour la conductance c est transiente, il en va de même pour celle de conductance c', ou, par contraposée, si la marche pour c' est récurrente, alors il en va de même pour la marche pour c.

(g). C'est le théorème de la limite monotone, n'oublions pas que la conductance effective est positive.

(h). Si on sort de tous les S_n avant de repasser par B_{in}, alors on ne revient jamais en B_{in}. Réciproquement, si on ne repasse jamais par B_{in}, alors on finit toujours par sortir de chaque S_n (sans quoi on contredirait la récurrence de la marche sur le graphe fini G_n) et, puisqu'on ne repasse jamais par B_{in}, la sortie de chaque S_n s'effectue évidemment avant de repasser par B_{in}.

Démonstration. Dans cette preuve, on utilise les indice c et c' pour signifier si on travaille dans le graphe muni de la conductance c ou de la conductance c'.

Il suffit de traiter le cas d'un graphe fini (le cas infini s'en déduisant par un passage à la limite). Puisqu'on peut multiplier le potentiel par une constante, on peut choisir le potentiel v_c (resp. $v_{c'}$) donnant lieu à un courant total $i_{\mathrm{tot},c}$ (resp. $i_{\mathrm{tot},c'}$) unitaire. L'égalité (2) indique alors que $\mathscr{E}(i) = R_{\mathrm{eff}}$. On a ainsi $R_{\mathrm{eff},c} = \mathscr{E}_c(i_c) \geq \mathscr{E}_{c'}(i_c)$, la dernière égalité découlant de la définition de l'énergie dans le cas général des flots. Mais i_c et $i_{c'}$ ayant le même flot total (à savoir 1), le principe de Thomson (Proposition 2.8) indique que $\mathscr{E}_{c'}(i_c) \geq \mathscr{E}_{c'}(i_{c'}) = R_{\mathrm{eff},c'}$, si bien que

$$R_{\mathrm{eff},c} \geq R_{\mathrm{eff},c'}.$$

On conclut en passant à l'inverse. □

Ce théorème est très puissant. Il montre que si on ne modifie pas trop le graphe, alors on ne change pas la récurrence ou transience de la marche aléatoire, ce qui est intuitif mais difficile à prouver.

En effet, il permet d'ajouter des arêtes au graphe d'une marche transiente en préservant la transience (ou, par contraposée, de retirer des arêtes à une marche récurrente en préservant la récurrence). En particulier, cela permet de réduire le problème de la transience/récurrence de la marche simple sur $\mathbb{Z}^d$ aux cas où $d \in \{1, 2, 3\}$.

Corollaire 3.5. *Si la marche simple sur $\mathbb{Z}^3$ est transiente, alors pour tout $d \geq 3$, la marche simple sur $\mathbb{Z}^d$ est transiente.*

Démonstration. Il suffit d'observer que $\mathbb{Z}^d = \mathbb{Z}^d \times \{0\} \subset \mathbb{Z}^{d+1}$ et que la conductance de la marche simple sur $\mathbb{Z}^d$ vue comme une conductance sur $\mathbb{Z}^{d+1}$ est inférieure à la conductance de la marche simple sur $\mathbb{Z}^{d+1}$ (pour passer de celle de $\mathbb{Z}^{d+1}$ à celle de $\mathbb{Z}^d$, on a simplement rendu nulles certaines conductances). □

Une autre utilisation spectaculaire du principe de monotonie de Rayleigh est qu'il permet de multiplier les conductances par les poids qu'on veut, du moment qu'ils ne soient pas trop grands ni trop petits, sans changer le statut de la marche aléatoire.

Corollaire 3.6. *Soit $\gamma : A \to \mathbb{R}_+^*$. On suppose qu'il existe deux constantes $m, M > 0$ telles que $m \leq \gamma \leq M$. Alors la marche sur G pour la conductance c et celle pour la marche γc ont le même statut de récurrence/transience.*

Démonstration. On a

$$mc \leq \gamma c \leq Mc.$$

Mais la marche pour la conductance mc et celle pour la conductance Mc sont les mêmes que celle pour c (puisqu'on normalise, multiplier les conductances par une constante ne modifie pas les probabilités de transition) donc le principe de Rayleigh indique que la marche pour γc a le même statut que celle pour c (l'inégalité $mc \leq \gamma c$ montre que si la marche pour c est transiente, alors celle pour γc l'est aussi, et l'inégalité $\gamma c \leq Mc$ montre la réciproque). □

Il nous reste donc à traiter les cas $d = 2$ et $d = 3$ (le cas $d = 1$ ayant déjà été traité). On commence par le cas $d = 2$. Intuitivement, s'il existe une arête qui forme un goulot d'étranglement entre B_{in} et B_{out}, alors sa résistance forme un "coût" minimum qu'on est obligé de payer pour relier les deux bornes. Si ce coût devient trop élevé au fur et à mesure que B_{out} part vers l'infini, alors la conductance effective sera nulle, et donc la marche sera récurrente d'après le Théorème 3.2. La notion d'ensemble séparant et l'inégalité de Nash-Williams [(i)] permettent de rendre rigoureuse l'ébauche de preuve qui suit.

Proposition 3.7 (Récurrence de la marche simple sur $\mathbb{Z}^2$)**.** *La marche simple sur $\mathbb{Z}^2$ est récurrente.*

Ébauche de démonstration. On note $\mathbb{S}_n$ la sphère $S(0, n)$ de $\mathbb{Z}^2$ pour la norme ℓ_1. On commence par identifier, pour chaque n, tous les sommets de $\mathbb{S}_n$ en un seul sommet, ce qui revient à faire tendre la conductance des arêtes reliant deux sommets de $\mathbb{S}_n$ vers $+\infty$. Ce faisant, on aboutit à un graphe en ligne de la forme

$$G = \mathbb{S}_0 \xleftrightarrow{c_{0,1}} \mathbb{S}_1 \xleftrightarrow{c_{1,2}} \mathbb{S}_2 \xleftrightarrow{c_{2,3}} \ldots$$

(i). Ce n'est pas un résultat dû à John Nash (prix Abel) et David Williams (probabiliste, auteur de best-sellers sur les probabilités). Crispin Nash-Williams est une seule personne.

Puisqu'on a ajouté des arêtes entre les sommets de $\mathbb{S}_n$ et augmenté leurs conductances vers $+\infty$ pour obtenir G à partir de $\mathbb{Z}^2$, le principe de monotonie de Rayleigh (Théorème 3.4) montre qu'il suffit de prouver la récurrence de la marche sur G pour obtenir celle de la marche simple sur $\mathbb{Z}^2$.

Pour ce faire, on utilise le Théorème 3.2. Il s'agit donc de calculer la conductance effective de G. On calcule donc les conductances $c_{k,k+1}$ des arêtes de G. Elles s'obtiennent par application de la règle de simplification des résistances en parallèles. Ainsi, $c_{k,k+1}$ est le nombre d'arêtes reliant $\mathbb{S}_k$ et $\mathbb{S}_{k+1}$. Il est facile de voir qu'il y en a $8k+4$ [(j)], donc $c_{k,k+1} = 8k+4$. La conductance effective de G se calcule alors par la règle de simplification des résistances en série, et on obtient

$$C_{\text{eff}}(G) = \frac{1}{R_{\text{eff}}(G)} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{8k+4} \right)^{-1} = 0,$$

d'où la récurrence de la marche sur G d'après le Théorème 3.2. □

On conclut ce texte avec la transience de la marche simple sur $\mathbb{Z}^3$. Pour cela, on énonce un critère de transience à l'aide de flots. La transience étant une notion propre aux graphes infinis, on commence par définir la notion de flot ***à l'infini***.

Définition 3.8. On appelle ***flot à l'infini*** sur G une fonction θ définie sur les arêtes orientées et vérifiant la loi des nœuds en tout sommet $x \in S \setminus B_{\text{in}}$, c'est-à-dire

$$\forall \{x,y\} \in A, \quad \theta(y,x) = -\theta(x,y) \quad \text{et} \quad \forall x \in S \setminus \{B_{\text{in}}\}, \quad \sum_{y \in V(x)} \theta(x,y) = 0.$$

Si en outre $\sum_{y \in V(B_{\text{in}})} \theta(B_{\text{in}}, y) = 1$, on dit que le flot est ***unitaire***.

L'énergie d'un flot à l'infini est définie comme dans la Définition 2.6.

Théorème 3.9. *On suppose G infini, dénombrable. La marche aléatoire sur G est transiente si et seulement s'il existe un flot à l'infini unitaire d'énergie totale finie.*

Démonstration. On prouve seulement le sens de l'équivalence qui nous permettra de montrer la transience de la marche simple sur $\mathbb{Z}^3$.

Supposons donc qu'il existe un tel flot θ. Revenons à l'exhaustion $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et des graphes $(G_n^\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ associés, définis plus haut dans cette section. Dans le graphe fini G_n^∞, on peut imposer un potentiel v_n rendant le courant i_n associé unitaire (car l'harmonicité est invariante par multiplication par une constante). Définissons le flot θ_n par restriction du flot θ à G_n^∞ (en définissant $\theta(x,\infty)$ comme la somme des $\theta(x,y)$ pour les arêtes $\{x,y\}$ de G rassemblées en l'arête $\{x,\infty\}$ de G_n^∞). Alors θ_n reste un flot unitaire (pour les bornes B_{in} et $B_{\text{out}} = \infty$), et par construction, $\mathscr{E}(\theta_n) \le \mathscr{E}(\theta)$. Le flot θ_n et le courant i_n étant unitaires, le principe de Thomson (Proposition 2.8) entraîne que

$$\mathscr{E}(i_n) \le \mathscr{E}(\theta_n),$$

si bien que $\mathscr{E}(i_n) \le \mathscr{E}(\theta) < +\infty$. Mais d'après (2), l'énergie est la résistance effective, donc

$$C_{\text{eff}}(G_n^\infty) \ge \frac{1}{\mathscr{E}(\theta)} > 0.$$

En passant à la limite et en utilisant le Théorème 3.2, on en déduit que $C_{\text{eff}}(G) > 0$, d'où la transience. □

Il nous reste à construire un tel flot dans $\mathbb{Z}^3$. Une façon de construire des flots est de considérer des chemins à l'infini aléatoires.

Définition 3.10. On appelle ***chemin à l'infini*** issu de B_{in} un chemin orienté infini issu de B_{in} dans lequel tout sommet n'est atteint qu'un nombre fini de fois.

(j). Faire un dessin. Pour $k \neq 0$, chacun des $4k$ sommets de $\mathbb{S}_k$ est relié à deux sommets de $\mathbb{S}_{k+1}$, sauf les 4 points extrémaux qui sont reliés à 3 sommets de $\mathbb{S}_{k+1}$. La formule reste vraie pour $k = 0$.

Supposons qu'on ait une variable aléatoire $\mathcal{P} = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ [k] à valeurs dans l'ensemble des chemins à l'infini issus de B_{in} telle que, avec probabilité 1, toute arête de G soit empruntée au plus une fois dans le chemin $\mathcal{P}$. On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathbb{P}\left(p_n = (x,y)\right) + \mathbb{P}\left(p_n = (y,x)\right)\right) < +\infty$$

pour toute arête $\{x, y\}$. En effet, cette somme est le nombre moyen de fois que l'arête $\{x, y\}$ est empruntée, et est donc inférieure à 1. On définit alors un flot à l'infini unitaire θ associé à la variable $\mathcal{P}$ en posant

$$\theta(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathbb{P}\left(p_n = (x,y)\right) - \mathbb{P}\left(p_n = (y,x)\right)\right). \tag{3}$$

Vérifions que θ est bien un flot unitaire à l'infini. On observe que

$$\theta = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathbb{1}_{p_n=(x,y)} - \mathbb{1}_{p_n=(y,x)}\right)\right]$$

et que, pour presque tout ω, $\theta_\omega(x,y) := \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathbb{1}_{p_n(\omega)=(x,y)} - \mathbb{1}_{p_n(\omega)=(y,x)}\right)$ définit un flot unitaire à l'infini sur G [l]. Les égalités définissant les flots unitaires à l'infini passent à l'espérance par linéarité, ce qui assure que θ en est un.

Théorème 3.11. *La marche simple sur $\mathbb{Z}^3$ (et donc sur $\mathbb{Z}^d$ pour n'importe quel $d \geq 3$) est transiente.*

Démonstration. On choisit une direction aléatoire u (selon la probabilité uniforme sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ pour la norme ℓ_1) et on construit un chemin à l'infini $\mathcal{P}$ de $\mathbb{Z}^3$, issu de 0, tel que la n-ième arête $\{x, y\}$ relie $x \in S(0, n)$ et $y \in S(0, n + 1)$ en minimisant la distance entre y et la demi-droite $\mathbb{R}_+u$ (faire un dessin). Ce procédé nous permet de construire un chemin aléatoire, auquel on associe le flot à l'infini unitaire θ défini en (3). Il reste à voir pourquoi ce flot est d'énergie totale finie pour conclure à l'aide du Théorème 3.9. Étant donné que les conductances de toutes les arêtes valent 1, il s'agit de montrer que $\sum_{\{x,y\}\in A} \theta(\{x, y\})^2 < +\infty$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. La probabilité qu'une arrête $\{x, y\}$, avec $\|x\| = r - 1$ et $\|y\| = r$ [m], soit dans $\mathcal{P}$ décroît au moins en $\frac{1}{r^2}$ [n]. Notons A une constante telle que cette probabilité soit inférieure à $\frac{A}{r^2}$, de sorte que $|\theta(\{x, y\})| \leq \frac{A}{r^2}$ et donc $\theta(\{x, y\})^2 \leq \frac{A^2}{r^4}$. Combien y a-t-il de telles arêtes ? De l'ordre du cardinal de la sphère $S(0, r) \cap \mathbb{Z}^3$, c'est-à-dire $3r(r + 1)$. Disons qu'il y en a au plus Br^2. Alors en regroupant les arêtes selon le rayon du sommet le plus éloigné de l'origine, l'énergie totale de θ vérifie

$$\mathscr{E}(\theta) \leq \sum_{r\in\mathbb{N}^*} \frac{A^2}{r^4} Br^2 < \infty,$$

ce qui conclut. □

Références

[1] Nicolas Curien. *Random walks and graphs.* 2024. Lecture notes.

[2] Russell Lyons and Yuval Peres. *Probability on Trees and Networks*, volume 42 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics.* Cambridge University Press, New York, 2021. Paperback.

(k). $\mathcal{P}$ pour "path" en anglais (le c de chemin étant déjà pris par la conductance).

(l). Pour la loi des noeuds qui est le moins évident : chaque fois qu'on passe par le sommet x dans le chemin $\mathcal{P}(\omega)$, l'arête qui arrive vers x est comptée avec un -1 et celle qui ressort de x est comptée avec un $+1$ dans $\sum_{y\in V(x)} \theta_\omega(x, y)$.

(m). On ne regarde que les arêtes de cette forme car, par construction de $\mathcal{P}$, ce sont les seules qui peuvent avoir un flot non nul.

(n). Par construction du chemin, étant donné un rayon $r \in \mathbb{N}$, il y a une unique arête de $\mathcal{P}$ qui relie $S(0, r - 1)$ à $S(0, r)$, et vu le choix uniforme de la direction, la probabilité que cette arête parte de x est de l'ordre de $\frac{1}{|S(0,r)\cap\mathbb{Z}^3|} = \frac{1}{3r(r+1)}$.