

# Forme limite du tas de sable abélien avec fuite

Théo Ballu, travail commun avec Cédric Boutillier, Sevak  
Mkrtchyan et Kilian Raschel

LAREMA, Université d'Angers

Séminaire 2PMA, janvier 2025

# Sommaire

## Tas de sable abélien

Le modèle classique

Problème de la forme limite sur  $\mathbb{Z}^2$

## Le modèle *leaky* sur $\mathbb{Z}^d$

Modèle *leaky*

Problème de la forme limite

L'intervention salvatrice des probabilités

Convergence du paramètre de fuite

Extension au cas de  $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, p\}$

## Tas de sable abélien

### Le modèle classique

Problème de la forme limite sur  $\mathbb{Z}^2$

### Le modèle *leaky* sur $\mathbb{Z}^d$

Modèle *leaky*

Problème de la forme limite

L'intervention salvatrice des probabilités

Convergence du paramètre de fuite

Extension au cas de  $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, p\}$

## Un peu d'histoire

Le modèle de tas de sable est un automate cellulaire issu de la physique statistique.

- ▶ 1989 : notion de *self-organized criticality* dans [BakTangWies]<sup>1</sup>
- ▶ 1990 : exemple du modèle de tas de sable dans [Dhar]<sup>2</sup>

---

1. Per Bak, Chao Tang et Kurt Wiesenfeld. "Self-organized criticality : An explanation of the 1/f noise". In : *Phys. Rev. Lett.* ().

2. Deepak Dhar. "Self-organized critical state of sandpile automaton models". In : *Phys. Rev. Lett.* ().

## Le modèle de tas de sable abélien

$G = (V, E)$  est un graphe.

# Le modèle de tas de sable abélien

$G = (V, E)$  est un graphe.

- ▶ Sur chaque sommet, on met des grains de sable.

## Le modèle de tas de sable abélien

$G = (V, E)$  est un graphe.

- ▶ Sur chaque sommet, on met des grains de sable.
- ▶ Si un sommet a plus de grains de sable que de voisins, il s'effondre : distribue un grain de sable à chaque voisin.

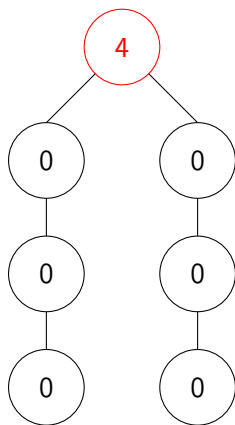
# Le modèle de tas de sable abélien

$G = (V, E)$  est un graphe.

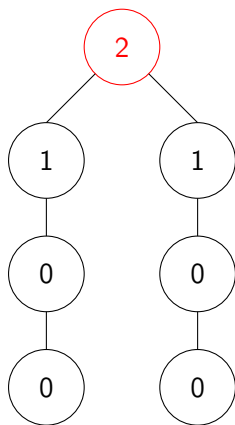
- ▶ Sur chaque sommet, on met des grains de sable.
- ▶ Si un sommet a plus de grains de sable que de voisins, il s'effondre : distribue un grain de sable à chaque voisin.
- ▶ On fait s'effondrer les sommets jusqu'à ce que ce ne soit plus possible.



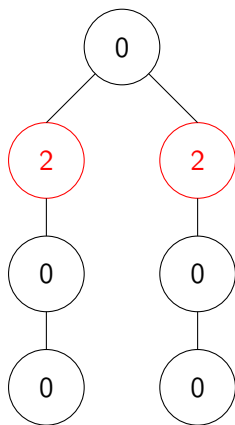
## Un exemple



## Un exemple



## Un exemple



## Un exemple

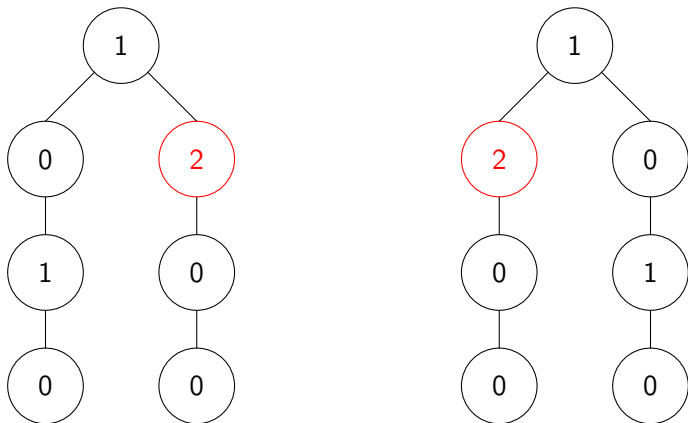
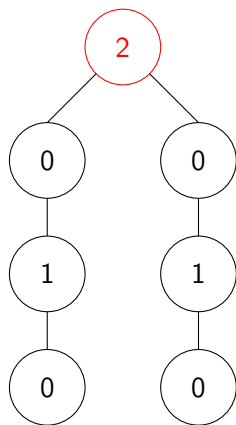
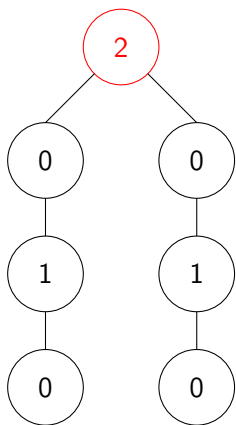


Figure – Deux possibilités d'effondrement.

## Un exemple



## Un exemple

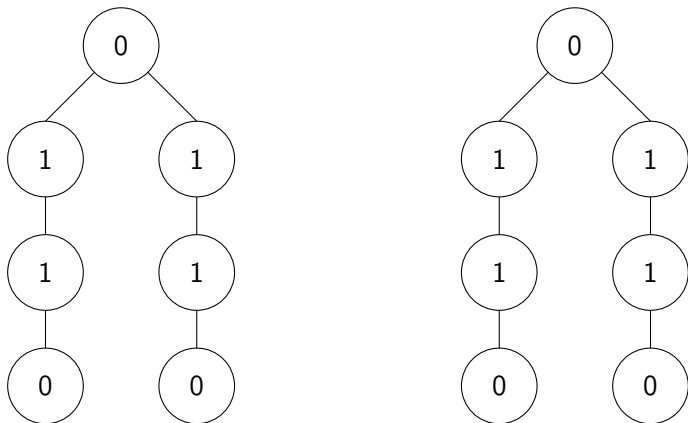


Figure – Aboutissent à la même configuration stable.

## Remarques

- ▶ Quand plusieurs effondrements sont possibles, l'ordre ne change pas la configuration finale (d'où le qualificatif *abélien*).
- ▶ Le processus est entièrement **déterministe**.

## Tas de sable abélien

Le modèle classique

Problème de la forme limite sur  $\mathbb{Z}^2$

## Le modèle *leaky* sur $\mathbb{Z}^d$

Modèle *leaky*

Problème de la forme limite

L'intervention salvatrice des probabilités

Convergence du paramètre de fuite

Extension au cas de  $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, p\}$



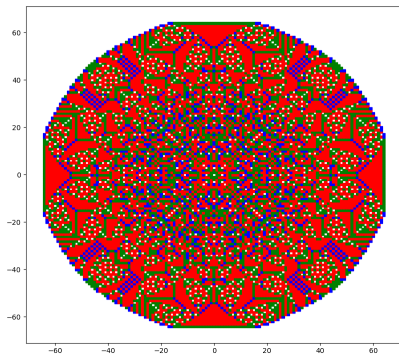
## Forme limite du tas de sable dans $\mathbb{Z}^2$

On prend  $G = \mathbb{Z}^2$ . On place  $N$  grains de sable en  $(0, 0)$  et on laisse s'effondrer jusqu'à stabilisation.

## Forme limite du tas de sable dans $\mathbb{Z}^2$

On prend  $G = \mathbb{Z}^2$ . On place  $N$  grains de sable en  $(0, 0)$  et on laisse s'effondrer jusqu'à stabilisation.

On renormalise par  $\sqrt{N}$ . Obtient-on une forme limite pour le **bord** du tas de sable quand  $N \rightarrow +\infty$ ? Que dire de cette forme?



**Figure** – Simulation avec  $N = 30\,000$  grains de sable. Chaque couleur indique un nombre de grains de sable (0, 1, 2 ou 3).

## Forme limite du tas de sable dans $\mathbb{Z}^2$

Ce qui est connu :

- ▶ Le tas de sable est entre deux cercles de rayons  $c_1\sqrt{N}$  et  $c_2\sqrt{N}$ .
- ▶ Il y a une forme limite après normalisation par  $\sqrt{N}$ .

## Forme limite du tas de sable dans $\mathbb{Z}^2$

Ce qui est connu :

- ▶ Le tas de sable est entre deux cercles de rayons  $c_1\sqrt{N}$  et  $c_2\sqrt{N}$ .
- ▶ Il y a une forme limite après normalisation par  $\sqrt{N}$ .

Ce qui est conjecturé :

- ▶ La forme est convexe.
- ▶ Ce n'est pas un disque.
- ▶ Il y a des zones plates.



Figure – Zone plate conjecturée.

## Vers le modèle *leaky*

Problème difficile avec de nombreuses conjectures ouvertes.

→ On change de modèle.

## Tas de sable abélien

Le modèle classique

Problème de la forme limite sur  $\mathbb{Z}^2$

## Le modèle *leaky* sur $\mathbb{Z}^d$

Modèle *leaky*

Problème de la forme limite

L'intervention salvatrice des probabilités

Convergence du paramètre de fuite

Extension au cas de  $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, p\}$

## Description du modèle *leaky*

On étudie la variante “leaky” du modèle, sur  $\mathbb{Z}^d$ . Les changements sont :

## Description du modèle *leaky*

On étudie la variante “leaky” du modèle, sur  $\mathbb{Z}^d$ . Les changements sont :

- ▶ la quantité de sable n’est plus entière ;



## Description du modèle *leaky*

On étudie la variante “leaky” du modèle, sur  $\mathbb{Z}^d$ . Les changements sont :

- ▶ la quantité de sable n’est plus entière ;
- ▶ on peut donner plus de sable à certains voisins qu’à d’autres ;

## Description du modèle *leaky*

On étudie la variante “leaky” du modèle, sur  $\mathbb{Z}^d$ . Les changements sont :

- ▶ la quantité de sable n’est plus entière ;
- ▶ on peut donner plus de sable à certains voisins qu’à d’autres ;
- ▶ à chaque effondrement, une proportion  $\varepsilon \in ]0, 1[$  du sable disparaît (d’où le nom “leaky”).

## Description du modèle *leaky*

Formellement : on se donne une famille  $(c(y))_{y \in \mathbb{Z}^d} \in [0, +\infty]^{\mathbb{Z}^d}$  telle que  $\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} c(y) < +\infty$ .

- ▶ On place  $N$  grains de sable en 0.
- ▶ Tant qu'il existe  $x \in \mathbb{Z}^d$  ayant au moins  $\frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} c(y)$  grains de sable :
  - ▶ il envoie  $c(y)$  grains de sable en  $x + y$  pour tout  $y \in \mathbb{Z}^d$  ;
  - ▶  $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} c(y)$  grains de sable disparaissent.

# Exemple d'un effondrement dans $\mathbb{Z}^2$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}$$

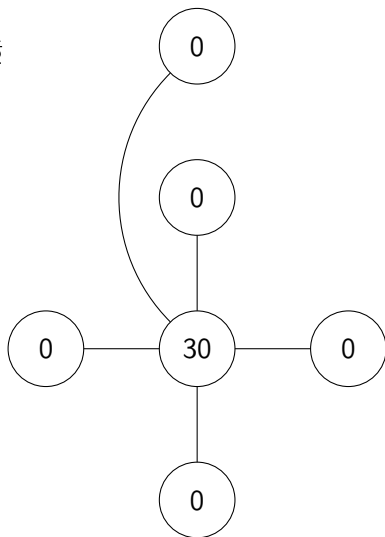
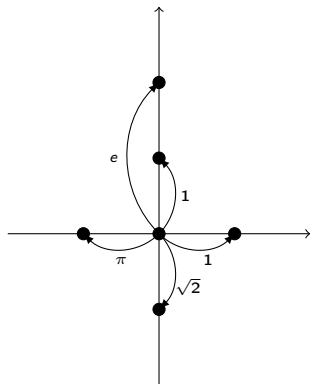


Figure – Gauche : famille des  $(c(y))_{y \in \mathbb{Z}^d}$ . Droite : morceau d'une configuration initiale.

# Exemple d'un effondrement dans $\mathbb{Z}^2$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}$$

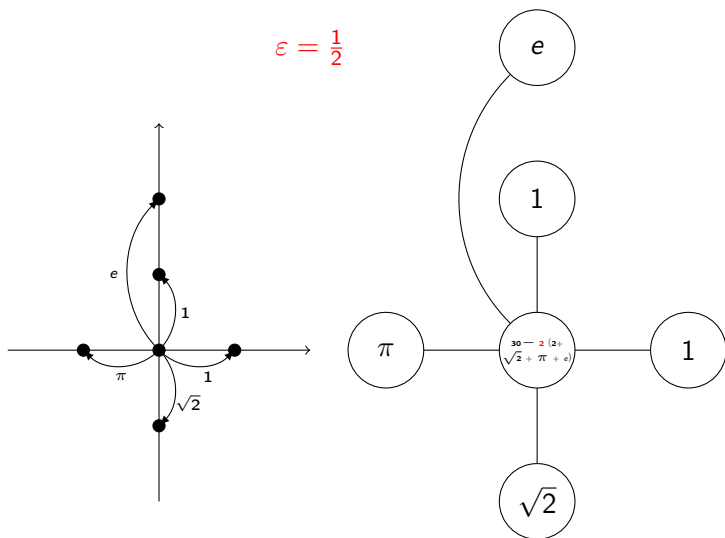


Figure – Après effondrement du sommet à 30 grains de sable.

## Tas de sable abélien

Le modèle classique

Problème de la forme limite sur  $\mathbb{Z}^2$

## Le modèle *leaky* sur $\mathbb{Z}^d$

Modèle *leaky*

Problème de la forme limite

L'intervention salvatrice des probabilités

Convergence du paramètre de fuite

Extension au cas de  $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, p\}$

## La forme limite

On dit qu'un sommet est dans le tas de sable s'il s'est effondré au moins une fois avant stabilisation.

Questions :

- ▶ Y a-t-il une forme limite quand  $N \rightarrow +\infty$  ? Si oui, comment la décrire ?

---

3. [Ian Alevy et Sevak Mkrtchyan](#). “The limit shape of the leaky Abelian sandpile model”. In : *Int. Math. Res. Not. IMRN* ().

## La forme limite

On dit qu'un sommet est dans le tas de sable s'il s'est effondré au moins une fois avant stabilisation.

Questions :

- ▶ Y a-t-il une forme limite quand  $N \rightarrow +\infty$ ? Si oui, comment la décrire?
- ▶ Quelle renormalisation? Est-ce toujours en  $\sqrt{N}$ ?

---

3. [Ian Alevy et Sevak Mkrtchyan](#). "The limit shape of the leaky Abelian sandpile model". In : *Int. Math. Res. Not. IMRN* ().



## La forme limite

On dit qu'un sommet est dans le tas de sable s'il s'est effondré au moins une fois avant stabilisation.

Questions :

- ▶ Y a-t-il une forme limite quand  $N \rightarrow +\infty$ ? Si oui, comment la décrire?
- ▶ Quelle renormalisation? Est-ce toujours en  $\sqrt{N}$ ?
- ▶ Comment la forme varie-t-elle avec  $\varepsilon$ ?

---

3. [Ian Alevy et Sevak Mkrtchyan](#). "The limit shape of the leaky Abelian sandpile model". In : *Int. Math. Res. Not. IMRN* ().

## La forme limite

On dit qu'un sommet est dans le tas de sable s'il s'est effondré au moins une fois avant stabilisation.

Questions :

- ▶ Y a-t-il une forme limite quand  $N \rightarrow +\infty$ ? Si oui, comment la décrire?
- ▶ Quelle renormalisation? Est-ce toujours en  $\sqrt{N}$ ?
- ▶ Comment la forme varie-t-elle avec  $\varepsilon$ ?

Dans [Alevy-Mkrtchyan]<sup>3</sup>, ces questions sont traitées pour  $\mathbb{Z}^2$ , en donnant la même quantité de sable aux 4 plus proches voisins. On généralise à  $\mathbb{Z}^d$  pour une grande classe de familles  $(c(y))_{y \in \mathbb{Z}^d}$ .

---

3. Ian Alevy et Sevak Mkrtchyan. “The limit shape of the leaky Abelian sandpile model”. In : *Int. Math. Res. Not. IMRN* ().

# Une animation

Figure – Exemple pour  $N$  variant de 1000 à  $10^{11}$  avec normalisation par  $r_N = \log(N)$ .

## Une heuristique presque vraie

L'ordre de grandeur  $r \simeq \log(N)$  est-il le bon ?

## Une heuristique presque vraie

L'ordre de grandeur  $r \simeq \log(N)$  est-il le bon ?

- ▶ Le sable se déplace du centre vers la sphère de rayon  $r$ .

## Une heuristique presque vraie

L'ordre de grandeur  $r \simeq \log(N)$  est-il le bon ?

- ▶ Le sable se déplace du centre vers la sphère de rayon  $r$ .
- ▶ Entre chaque sphère, une proportion  $\varepsilon$  est perdue : à la fin, il ne reste que  $\simeq N(1 - \varepsilon)^r$  grains.

## Une heuristique presque vraie

L'ordre de grandeur  $r \simeq \log(N)$  est-il le bon ?

- ▶ Le sable se déplace du centre vers la sphère de rayon  $r$ .
- ▶ Entre chaque sphère, une proportion  $\varepsilon$  est perdue : à la fin, il ne reste que  $\simeq N(1 - \varepsilon)^r$  grains.
- ▶ Ces  $N(1 - \varepsilon)^r$  grains recouvrent une zone d'aire  $\simeq r^2$ , d'où

$$N(1 - \varepsilon)^r \simeq r^2, \text{ i.e. } \underbrace{r - \frac{\ln(r^2)}{\ln(1 - \varepsilon)}}_{\simeq r} \simeq \frac{\ln(N)}{-\ln(1 - \varepsilon)}, \text{ donc}$$

$$r \simeq \frac{\ln(N)}{-\ln(1 - \varepsilon)}.$$

## Tas de sable abélien

Le modèle classique

Problème de la forme limite sur  $\mathbb{Z}^2$

## Le modèle *leaky* sur $\mathbb{Z}^d$

Modèle *leaky*

Problème de la forme limite

L'intervention salvatrice des probabilités

Convergence du paramètre de fuite

Extension au cas de  $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, p\}$



## Marche aléatoire

On associe une marche aléatoire **tuée**  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à la famille  $(c(y))_{y \in \mathbb{Z}^d}$ .

## Marche aléatoire

On associe une marche aléatoire **tuée**  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à la famille  $(c(y))_{y \in \mathbb{Z}^d}$ .

- ▶ À chaque étape, la marche est tuée avec probabilité  $\varepsilon$ .

# Marche aléatoire

On associe une marche aléatoire **tuée**  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à la famille  $(c(y))_{y \in \mathbb{Z}^d}$ .

- ▶ À chaque étape, la marche est tuée avec probabilité  $\varepsilon$ .
- ▶ Sinon, elle saute de  $x$  vers  $x + y$  avec proba  $(1 - \varepsilon) \frac{c(y)}{\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} c(z)}$ .

## Marche aléatoire

On associe une marche aléatoire **tuée**  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à la famille  $(c(y))_{y \in \mathbb{Z}^d}$ .

- ▶ À chaque étape, la marche est tuée avec probabilité  $\varepsilon$ .
- ▶ Sinon, elle saute de  $x$  vers  $x + y$  avec proba  $(1 - \varepsilon) \frac{c(y)}{\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} c(z)}$ .

Sa **fonction de Green** est

$$G(0, x) = \mathbb{E}_0 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{X_n=x} \right].$$

C'est le nombre moyen de passages en  $x$ , en lançant la marche en 0.

# Lien entre tas de sable et marche aléatoire

## Proposition

Il existe deux constantes  $\alpha, \beta > 0$  telles que :

- ▶ si  $G(0, x) > \frac{\alpha}{N}$ , alors  $x$  est dans le tas de sable ;
- ▶ si  $G(0, x) < \frac{\beta}{N}$ , alors  $x$  n'est pas dans le tas de sable.

## Illustration (dans une direction $u$ fixée)

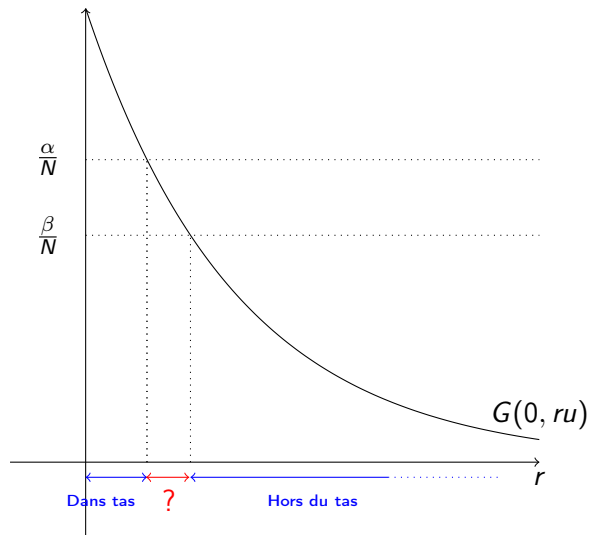


Figure – Si  $G$  décroît assez vite, la zone “?” sera fine. Assez pour disparaître après normalisation par  $\log(N)$  ?

## Décroissance de la fonction de Green

Sous de bonnes hypothèses<sup>4</sup>, l'asymptotique de  $G(0, x)$  quand  $\|x\| \rightarrow +\infty$  est connue :

$$G(0, ru) \simeq \exp(-\gamma_u r).$$

---

4. Irréductibilité, apériodicité, existence de moments exponentiels de tous ordres.

5. P. Ney et F. Spitzer. "The Martin boundary for random walk". In : **Trans. Amer. Math. Soc.** ().

6. Matthieu Dussaule. "The Martin boundary of a free product of abelian groups". In : **Ann. Inst. Fourier (Grenoble)** ().

7. Théo Ballu. "Asymptotics of Green functions for Markov-additive processes : an approach via dyadic splitting of integrals". In : (2024). arXiv : 2407.10685 [math.PR]. url : <https://arxiv.org/abs/2407.10685>.

## Décroissance de la fonction de Green

Sous de bonnes hypothèses<sup>4</sup>, l'asymptotique de  $G(0, x)$  quand  $\|x\| \rightarrow +\infty$  est connue :

$$G(0, ru) \simeq \exp(-\gamma_u r).$$

La décroissance exponentielle dépend de la direction  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ .

---

4. Irréductibilité, apériodicité, existence de moments exponentiels de tous ordres.

5. P. Ney et F. Spitzer. "The Martin boundary for random walk". In : **Trans. Amer. Math. Soc.** ().

6. Matthieu Dussaule. "The Martin boundary of a free product of abelian groups". In : **Ann. Inst. Fourier (Grenoble)** ().

7. Théo Ballu. "Asymptotics of Green functions for Markov-additive processes : an approach via dyadic splitting of integrals". In : (2024). arXiv : 2407.10685 [math.PR]. url : <https://arxiv.org/abs/2407.10685>.



# Décroissance de la fonction de Green

Sous de bonnes hypothèses<sup>4</sup>, l'asymptotique de  $G(0, x)$  quand  $\|x\| \rightarrow +\infty$  est connue :

$$G(0, ru) \simeq \exp(-\gamma_u r).$$

La décroissance exponentielle dépend de la direction  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ .

Littérature : [Ney-Spitzer]<sup>5</sup>, [Dussaule]<sup>6</sup>, [B]<sup>7</sup> et plein d'autres.

---

4. Irréductibilité, apériodicité, existence de moments exponentiels de tous ordres.

5. P. Ney et F. Spitzer. "The Martin boundary for random walk". In : **Trans. Amer. Math. Soc.** ().

6. Matthieu Dussaule. "The Martin boundary of a free product of abelian groups". In : **Ann. Inst. Fourier (Grenoble)** ().

7. Théo Ballu. "Asymptotics of Green functions for Markov-additive processes : an approach via dyadic splitting of integrals". In : (2024). arXiv : 2407.10685 [math.PR]. url : <https://arxiv.org/abs/2407.10685>.

# Convergence d'ensembles

## Définition

La **distance de Hausdorff** entre deux ensembles  $A$  et  $B$  est

$$d(A, B) = \max \left( \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right).$$

# Le théorème de convergence

## Théorème

*Il y a convergence du tas de sable vers une forme limite (au sens de la distance de Hausdorff) après normalisation par  $\log(N)$ .*

# Le théorème de convergence

## Théorème

*Il y a convergence du tas de sable vers une forme limite (au sens de la distance de Hausdorff) après normalisation par  $\log(N)$ .*

La forme limite s'exprime à l'aide du taux de décroissance exponentielle  $\gamma_u$  de  $G(0, ru) \simeq \exp(-\gamma_u r)$ .

# Une animation

Figure – La même animation qu'avant, mais maintenant la convergence est assurée. Mais vers quoi ?

## Notion de courbe duale

But : identifier la courbe limite (en rouge).

# Notion de courbe duale

But : identifier la courbe limite (en rouge).

## Définition

Soit  $K$  un convexe compact tel que  $0 \in \overset{\circ}{K}$ . Soit  $x \in \partial K$  tel que l'hyperplan d'équation  $n \cdot y = 1$  soit tangent à  $K$ . Alors on pose

$$x^* = n.$$

# Notion de courbe duale

But : identifier la courbe limite (en rouge).

## Définition

Soit  $K$  un convexe compact tel que  $0 \in \overset{\circ}{K}$ . Soit  $x \in \partial K$  tel que l'hyperplan d'équation  $n \cdot y = 1$  soit tangent à  $K$ . Alors on pose

$$x^* = n.$$

S'il y a plusieurs hyperplans tangents (e.g. : sommet d'un polygone),  $x^*$  est un ensemble.



# Notion de courbe duale

But : identifier la courbe limite (en rouge).

## Définition

Soit  $K$  un convexe compact tel que  $0 \in \overset{\circ}{K}$ . Soit  $x \in \partial K$  tel que l'hyperplan d'équation  $n \cdot y = 1$  soit tangent à  $K$ . Alors on pose

$$x^* = n.$$

S'il y a plusieurs hyperplans tangents (e.g. : sommet d'un polygone),  $x^*$  est un ensemble.

Les  $x^*$  forment la **courbe duale** de  $K$ .

## Exemples de courbes duales

- ▶ Ellipsoïde : la dualité inverse la longueur de chaque axe.

## Exemples de courbes duales

- ▶ Ellipsoïde : la dualité inverse la longueur de chaque axe.
- ▶ Polytope : soit  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$  et

$$K = \bigcup_{i=1}^n \left\{ y \in \mathbb{R}^d \mid y \cdot x_i \leq 1 \right\}.$$

Alors

$$K^* = \text{conv}\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Par involuion, on a aussi le chemin inverse  
enveloppe convexe  $\rightarrow$  intersections de demi-espaces.

## Identification de la forme limite

La transformée de Laplace de  $(X_n)$  est

$$L(t) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} e^{t \cdot y} \mathbb{P}_0(X_1 = y).$$

## Identification de la forme limite

La transformée de Laplace de  $(X_n)$  est

$$L(t) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} e^{t \cdot y} \mathbb{P}_0(X_1 = y).$$

C'est une fonction **convexe**, donc l'ensemble de niveau  $L^{-1}([0, 1])$  est convexe.

# Identification de la forme limite

La transformée de Laplace de  $(X_n)$  est

$$L(t) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} e^{t \cdot y} \mathbb{P}_0(X_1 = y).$$

C'est une fonction **convexe**, donc l'ensemble de niveau  $L^{-1}([0, 1])$  est convexe.

## Théorème

*La forme limite du tas de sable quand  $N \rightarrow +\infty$  est la courbe duale de  $L^{-1}([0, 1])$ .*

# Une animation

**Figure** – Encore la même animation qu'avant, mais maintenant on connaît la courbe rouge.

## Tas de sable abélien

Le modèle classique

Problème de la forme limite sur  $\mathbb{Z}^2$

## Le modèle *leaky* sur $\mathbb{Z}^d$

Modèle *leaky*

Problème de la forme limite

L'intervention salvatrice des probabilités

Convergence du paramètre de fuite

Extension au cas de  $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, p\}$



## Convergence du paramètre de fuite

On étudie l'influence du paramètre de fuite  $\varepsilon$  sur la forme limite.

⚠ Ici, on a déjà fait tendre  $N \rightarrow +\infty$ .

## Convergence du paramètre de fuite

On étudie l'influence du paramètre de fuite  $\varepsilon$  sur la forme limite.

⚠ Ici, on a déjà fait tendre  $N \rightarrow +\infty$ .

On regarde  $\varepsilon \rightarrow 1$  (presque tout le sable disparaît) et  $\varepsilon \rightarrow 0$  (presque tout le sable est transmis).

## Convergence du paramètre de fuite

On étudie l'influence du paramètre de fuite  $\varepsilon$  sur la forme limite.

⚠ Ici, on a déjà fait tendre  $N \rightarrow +\infty$ .

On regarde  $\varepsilon \rightarrow 1$  (presque tout le sable disparaît) et  $\varepsilon \rightarrow 0$  (presque tout le sable est transmis).

Stratégie de preuve : étudier l'ensemble de niveau  $L^{-1}([0, 1])$  et exploiter la dualité.

## Cas où $\varepsilon \rightarrow 0$

### Théorème

*On normalise en multipliant par  $\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}$ .*

*Alors la forme limite converge (pour Hausdorff) vers un ellipsoïde quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

## Cas où $\varepsilon \rightarrow 0$

### Théorème

*On normalise en multipliant par  $\sqrt{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}$ .*

*Alors la forme limite converge (pour Hausdorff) vers un ellipsoïde quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

Cet ellipsoïde est  $\{x \in \mathbb{R}^d \mid 2x^\top \sigma x \leq 1\}$  où  $\sigma$  est la matrice de covariance de la marche non tuée.

## Illustration du cas $\varepsilon \rightarrow 0$

Figure – Convergence de la courbe limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## Cas où $\varepsilon \rightarrow 1$

### Théorème

*On normalise en multipliant par  $-\log(1 - \varepsilon)$ .*

*Alors la forme limite converge (pour Hausdorff) vers un polytope quand  $\varepsilon \rightarrow 1$ .*

## Cas où $\varepsilon \rightarrow 1$

### Théorème

*On normalise en multipliant par  $-\log(1 - \varepsilon)$ .*

*Alors la forme limite converge (pour Hausdorff) vers un polytope quand  $\varepsilon \rightarrow 1$ .*

Ce polytope est l'enveloppe convexe du support de la marche aléatoire.



## Illustration du cas $\varepsilon \rightarrow 1$

Figure – Convergence de la courbe limite quand  $\varepsilon \rightarrow 1$ .

## Tas de sable abélien

Le modèle classique

Problème de la forme limite sur  $\mathbb{Z}^2$

## Le modèle *leaky* sur $\mathbb{Z}^d$

Modèle *leaky*

Problème de la forme limite

L'intervention salvatrice des probabilités

Convergence du paramètre de fuite

Extension au cas de  $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, p\}$

## Une extension

En réalité, on a traité le cas de  $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, p\}$  ( $p$  couches de  $\mathbb{Z}^d$ ).

## Une extension

En réalité, on a traité le cas de  $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, p\}$  ( $p$  couches de  $\mathbb{Z}^d$ ).

Le sable envoyé dépend de la couche qui envoie et de celle qui reçoit.

## Une extension

En réalité, on a traité le cas de  $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, p\}$  ( $p$  couches de  $\mathbb{Z}^d$ ).

Le sable envoyé dépend de la couche qui envoie et de celle qui reçoit.

Tous les résultats précédents ont un analogue dans ce nouveau cadre.

## Une extension

En réalité, on a traité le cas de  $\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, p\}$  ( $p$  couches de  $\mathbb{Z}^d$ ).

Le sable envoyé dépend de la couche qui envoie et de celle qui reçoit.

Tous les résultats précédents ont un analogue dans ce nouveau cadre.

Remarquable : la forme limite quand  $N \rightarrow +\infty$  est la même sur toutes les couches de  $\mathbb{Z}^d$ .